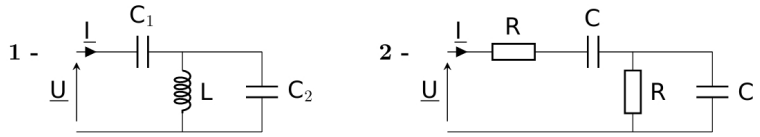
TD Régime sinusoïdal forcé

1 Impédances équivalentes

Donner l'expression de l'impédance équivalente à chaque association de dipôles.

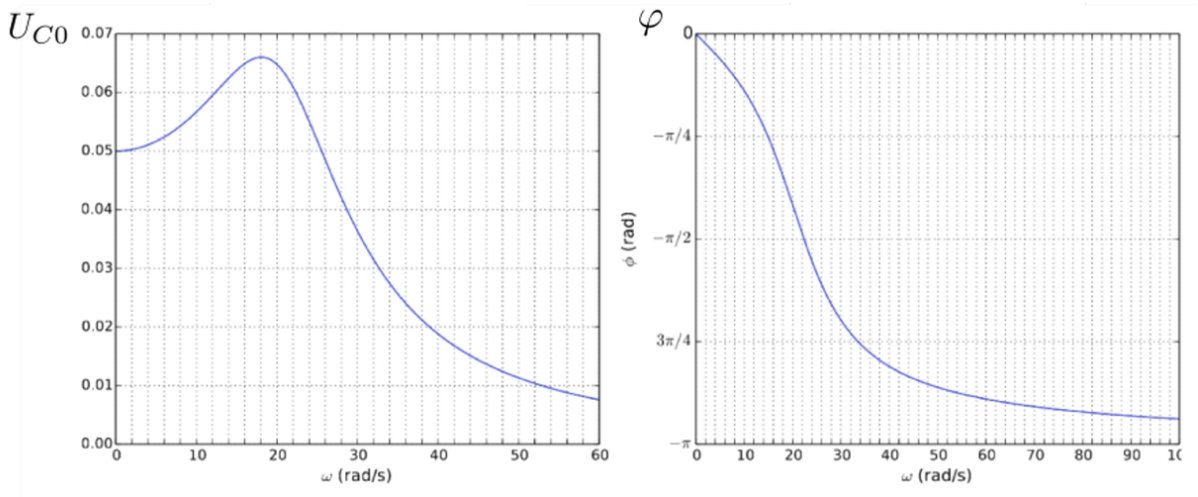


2 Résonance en tension du circuit RLC série

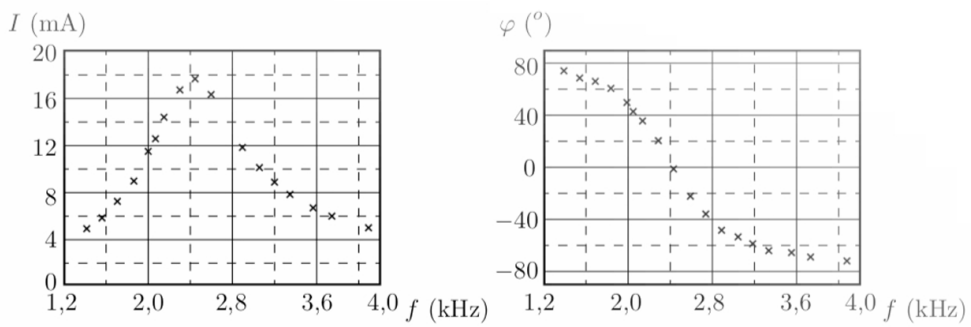
On étudie un circuit RLC série, le générateur idéal de tension délivre une tension $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$.
1 - On cherche la tension du condensateur $u_c(t)$ sous la forme $u_c(t) = U_{C0} \cos(\omega t + \varphi)$. Par quelle expression complexe ce signal est-il représenté ?
2 - Donner l'expression de l'amplitude complexe $\underline{U}_{C0}$ de u_c en fonction de R, L, C, E_0 et ω. Écrire ensuite cette expression sous la forme canonique $\underline{U}_{C0} = \frac{E_0}{1-x^2+\mathrm{j}\frac{x}{Q}}$, en introduisant la pulsation propre ω_0, le facteur de qualité Q, et la pulsation réduite $x = \omega/\omega_0$. On donnera les expressions de ω_0 et de Q en fonction de R, L et C.
3 - En déduire l'expression de l'amplitude U_{C0} de $u_C(t)$ en fonction de x. Quelle est sa valeur en $\omega = 0$? En ω_0 ? En $+\infty$? ((+)Faire une étude afin de déterminer s'il y a existence d'une résonance. On établira l'expression de la position ω_r de cette résonance. Quelle est alors la valeur de la tension ?) Tracer l'allure de la courbe $U_{C0} = f(x)$ dans le cas où il y a résonance et dans le cas où il n'y a pas résonance.
4 - En déduire également l'expression de la différence de phase $\Delta\varphi$ entre $u_C(t)$ et la tension d'alimentation en fonction de x. Donner l'allure de la courbe en déterminant la valeur de $\Delta\varphi$ en hautes fréquences, en basses fréquences et en $x = 1$.
5 - À partir de quelle valeur du facteur de qualité la pulsation de résonance et la pulsation propre sont-elles proches à moins de 1% ?

3 Étude de graphes d'amplitude et de phase

On étudie un circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé. On s'intéresse ci-dessous à la tension aux bornes du condensateur. On réalise une acquisition de l'amplitude de cette tension et du déphasage entre cette tension et celle du générateur.

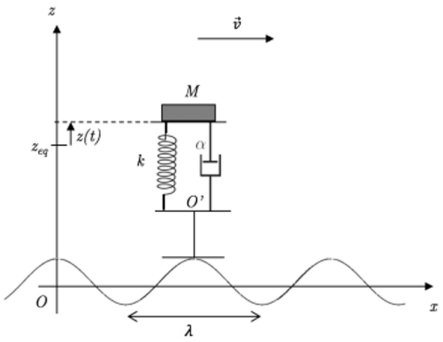


1 - Estimer à partir de ces graphes pulsation propre et facteur de qualité du circuit.
2 - On change ensuite les paramètres du circuit. Reprendre les mêmes questions à partir des mesures de courant ci dessous.



4 Le salaire de la peur

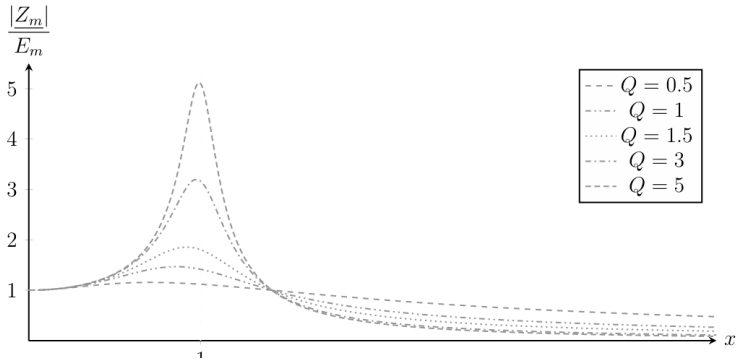
On s'intéresse à un camion qui aborde une piste bosselée. On se pose la question de la vitesse à choisir pour subir le moins possibles les oscillations de la piste.
On modélise le camion par une masse m en contact avec le sol via un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0, et un amortisseur de coefficient d'amortissement α (cf schéma ci-contre).
Le camion se déplace horizontalement à une vitesse $\vec{v} = v_0\vec{e}_x$, sur une piste dont le profil impose à O' de suivre une cote $z_{O'} = L + h(t)$ avec $h(t) = E_m \cos\left(\frac{2\pi x(t)}{\lambda}\right)$, $x(t)$ étant l'abscisse du point O'. On note $z_{\text{éq}}$ l'altitude du centre d'inertie G du camion lorsqu'il est à l'équilibre (camion immobile au repos, pas de bosses donc $h(t) = 0$). Le mouvement vertical est repéré par $u(t)$, qui est la différence de la position verticale z de G et sa position $z_{\text{éq}}$ à l'équilibre.



Enfin, la force exercée par l'amortisseur s'écrit $\vec{F} = -\alpha\left(\dot{z}(t) - \dot{z}_{O'}(t)\right)\vec{e}_z$.
1 - Donner l'expression de $x(t)$ en supposant que O' se trouve à la verticale de O à l'instant initial. En déduire l'expression de la pulsation ω du forçage du système en fonction de λ et de v. On conservera la notation ω dans ce qui suit.
2 - Faire un bilan des forces s'exerçant sur la masse, et exprimer chaque force en fonction de $\vec{e}_z$ et des paramètres du problème (dont $z(t)$ et sa dérivée, $L, h(t)$ et sa dérivée, $k, l_0, \alpha, z_{\text{eq}}$).
3 - On s'intéresse à la position d'équilibre. Montrer que $z_{\text{éq}}$ vérifie $-k\left(z_{\text{éq}} - L - l_0\right) - mg = 0$.
4 - Déterminer l'équation différentielle satisfaite par $u(t)$. Montrer qu'elle se met sous la forme $\ddot{u} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u} + \omega_0^2 u(t) = \frac{\omega_0}{Q}\dot{h} + \omega_0^2 h(t)$.
5 - Donner la forme du signal complexe associé à $u(t)$. Déterminer l'expression de l'amplitude complexe $\underline{U}$. Montrer ensuite que l'amplitude U_m des oscillations verticales du camion est donnée par la relation

$$U_m = \frac{\sqrt{1 + x^2/Q^2}}{\sqrt{\left(1 - x^2\right)^2 + x^2/Q^2}} E_m$$

avec $x = \omega/\omega_0$ la pulsation réduite.
6 - Le graphique ci-dessous montre l'évolution du rapport Z_m/E_m en fonction de x pour plusieurs valeurs de Q. Quelles sont alors les solutions pour réussir à traverser la zone bosselée sans trop de peine ?

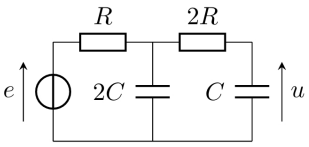


5 Obtention d'une équation différentielle

En utilisant les complexes, montrer que la tension u est solution de l'équation différentielle

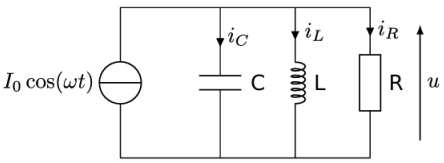
$$4\tau^2 \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + 5\tau \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u = e$$

en posant $\tau = RC$.



6 Antenne émettrice

L'antenne d'un émetteur radio peut être modélisée par un circuit électrique équivalent composé de l'association en parallèle d'une résistance R, d'une bobine d'inductance L et d'un condensateur de capacité C. L'antenne est alimentée par une source idéale de courant dont l'intensité caractéristique varie de manière sinusoïdale dans le temps : $i(t) = I_0\cos(\omega t)$. On s'intéresse à la manière dont l'amplitude de la tension $u(t)$ aux bornes de l'antenne, qui correspond au signal envoyé, dépend de ω.



1 - Déterminer l'impédance complexe de l'association équivalente à l'antenne.
2 - En déduire l'amplitude complexe de la tension u en fonction de ω, I_0 et des valeurs des composants. On mettra $\underline{U}$ sous la forme canonique $\underline{U} = \frac{U_m}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$ en précisant les expressions de x et Q.
3 - Pour quelle pulsation l'amplitude U de u prend-elle sa valeur maximale ?
4 - Représenter le graphe donnant U en fonction de la pulsation réduite x que l'on définira.
5 - Donner l'expression de l'acuité $A_c = \omega_0/\Delta\omega$ de la résonance. Interpréter sa dépendance en R.
6 - Quel est le déphasage entre $u(t)$ et $i(t)$? Comment varie-t-il avec la pulsation réduite ?