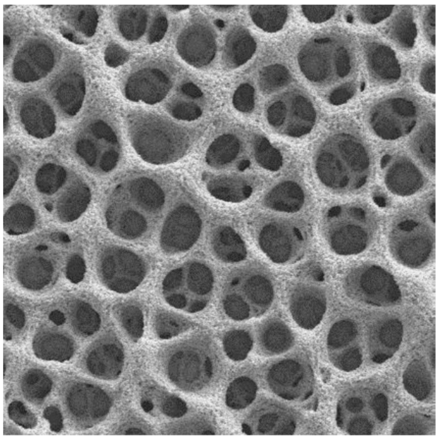
Samedi 27 novembre 2021

DEVOIR SURVEILLE N°3
PHYSIQUE

<u>I. Les supercondensateurs pour stocker de l'énergie</u> (d'après EPITA 2021) :

Un supercondensateur est un condensateur utilisant des électrodes de très grande porosité. Les surfaces des électrodes sont ainsi très élevées assurant une capacité très importante pour un encombrement réduit, et donc une densité d'énergie stockée intéressante.

Leur faible résistance interne permet des courants élevés et donc des charges rapides et des puissances de sortie importantes.



Il est intéressant de les comparer aux batteries classiques sur les deux critères : énergie massique (en $J.kg^{-1}$) et puissance de pointe massique (en $W.kg^{-1}$).

Ils sont utilisés dans des domaines variés tels que l'automobile, le transport collectif urbain (bus, tramways, métros), les alimentations de secours, les appareils de mesures et l'électronique domestique (appareils photo, smartphones, …).

Document : En 2009, la RATP et Alstom ont expérimenté en service commercial un tramway Citadis équipé de supercondensateurs sur la ligne T3 du réseau francilien. La rame a été équipée de 48 modules de supercondensateurs (15 kg pièce) pour le stockage de l'énergie à bord. L'ensemble est équivalent à 48 supercondensateurs montés en dérivation sous une tension de 750 V. Ceci permet aux trams de circuler en autonomie sur les sections dépourvues de ligne aérienne de contact. En autonomie la rame peut franchir 400 m, soit la distance entre deux stations sur la ligne, avec une vitesse moyenne d'environ 15 km/h [$\approx$ 4 $m.s^{-1}$].

Les moteurs développent une puissance moyenne continue de 500 kW, et sont alimentés sous 750 V.

Présentant une résistance interne très faible, les supercondensateurs autorisent le passage d'intensités très importantes pendant les 20 secondes que dure un rechargement en station, et sont donc en cela plus adaptés que les batteries conventionnelles.

A. Approche qualitative et comparaison avec les batteries Li-ion

1. Rappeler la caractéristique d'un condensateur et l'expression de l'énergie stockée sous forme électrostatique.

2. À l'aide de données extraites du document ci-dessus et des approximations nécessaires, en déduire l'ordre de grandeur des valeurs suivantes :

- énergie E_{tot} nécessaire au trajet entre deux stations,
- capacité d'un des 48 supercondensateurs,
- temps caractéristique lors de la recharge du condensateur
- résistance du circuit de charge.

3. Compléter le tableau ci-dessous et comparer les caractéristiques des supercondensateurs utilisés dans ce tramway avec celles des batteries Li-ion :

	Energie massique	Puissance massique	Durée de vie
Batterie Li-ion	540 $kJ.kg^{-1}$	100 $W.kg^{-1}$	1000 cycles
Supercondensateur			10^6 cycles

B. Etude quantitative de la charge et amélioration du rendement

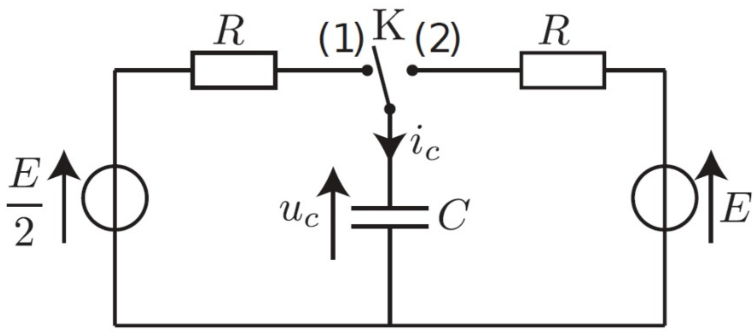
Lorsqu'un condensateur est utilisé comme une batterie, la question de sa recharge se pose. L'énergie est prélevée sur le réseau électrique, et on souhaiterait que 100% de cette énergie soit transférée au condensateur : le rendement serait alors de 100%.

L'objectif de la suite est de déterminer le rendement de la recharge d'un condensateur en envisageant des stratégies d'efficacité croissante.

On rappelle que le rendement de la charge du condensateur le rapport entre l'énergie reçue par le condensateur au cours de la charge et de l'énergie fournie par le (ou les) générateur(s) au cours de cette même charge :

$$r = \frac{E_r(C)}{E_f(générateur)}$$

On considère dans la suite le circuit présenté ci-dessous. Il permettra de mettre en œuvre deux méthodes de recharge différentes, lesquelles mèneront à deux valeurs différentes du rendement.



B.1. Charge en une seule étape

L'interrupteur K est initialement placé en position intermédiaire où il n'établit aucun contact.

Le condensateur étant initialement déchargé, on bascule l'interrupteur K dans la position (2) à l'instant t = 0.

4. Établir l'équation différentielle portant sur $u_c(t)$ et la mettre sous forme canonique.

5. Résoudre l'équation différentielle et tracer l'allure de la solution $u_c(t)$.

6. Calculer l'énergie reçue par le condensateur $E_r(C)$ au cours de sa charge.

7. Calculer l'énergie fournie par le générateur E_f(géné) sur l'ensemble de la charge.

8. Quelle est la valeur du rendement r_1 de la charge avec la méthode envisagée ? Peut-il être optimisé en modifiant la résistance R ?

B.2. Charge en deux étapes

Afin d'améliorer le rendement, on réalise la charge en deux temps, le condensateur étant initialement déchargé.

À partir de la position intermédiaire dans laquelle il n'établit aucun contact, l'interrupteur K est placé en position (1) à l'instant initial t = 0. Lorsque le régime transitoire qui s'ensuit est achevé, l'interrupteur est basculé en position (2).

9. Déterminer l'expression de $u_c(t)$ pendant la première phase de la charge.

10. Déterminer en fonction de R et de C l'expression de l'instant t_1 pour lequel la tension u_c aux bornes du condensateur atteint 99% de sa valeur finale au cours de cette première étape.

Dans la suite, **on considère que la première étape de la charge est totalement achevée à cet instant t_1** [donc $u_c(t_1) \approx E/2$], et qu'on passe alors en phase 2 : l'interrupteur bascule en position (2) et on introduit une nouvelle origine des temps : $t' = t - t_1$.

11. Déterminer la tension $u_c(t')$ aux bornes du condensateur au cours de la deuxième phase de charge.

12. Tracer l'allure de u_c en fonction du temps au cours de l'ensemble des deux phases de charge.

13. Exprimer l'intensité i_c qui traverse le condensateur pendant chacune des deux phases de charge.

14. Déterminer l'énergie électrique fournie par les deux générateurs pour réaliser la charge complète du condensateur.

15. En déduire le rendement r_2 [l'expression de r devient : $r_2 = \frac{E_r(C)}{E_f(géné1)+E_f(géné2)}$]. Conclure quant aux avantages et inconvénients par rapport à la première méthode.

B.3. Charge en N étapes

Les questions précédentes montrent que le fractionnement de la charge en deux étapes permet d'augmenter le rendement.

On s'intéresse alors au rendement pour un fractionnement en N étapes.

Notons $t_0 = 0$ l'instant initial où le condensateur est déchargé.

La première étape a lieu de t_0 à t_1, par un générateur de tension E/N, à travers une résistance R.

De manière générale, l'étape numéro k de la charge (k varie de 1 à N) se déroule entre les instants t_{k-1} et t_k, par un générateur de tension kE/N, à travers une résistance R avec $t_k = k\ t_1$.
Au début de l'étape k, $u_C(t_{k-1}) = (k-1)E/N$, et à la fin de l'étape k, $u_C(t_k) = kE/N$.

16. Lors de l'étape k de la charge, déterminer en fonction de k et de N l'équation différentielle suivie par la tension u_c aux bornes du condensateur, puis l'expression de sa solution u_c,

17. Déterminer également l'expression de l'énergie fournie par le générateur numéro k.

18. Déterminer l'expression de l'énergie fournie par l'ensemble des générateurs lors de la charge totale du condensateur.

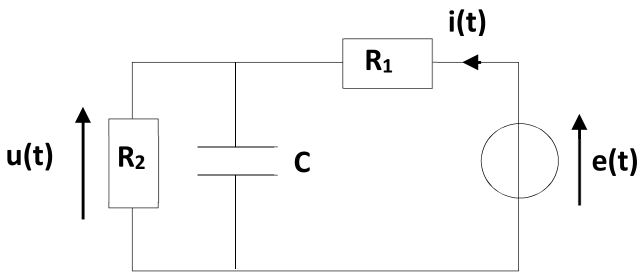
19. Montrer que le rendement de la charge en N étapes s'écrit :

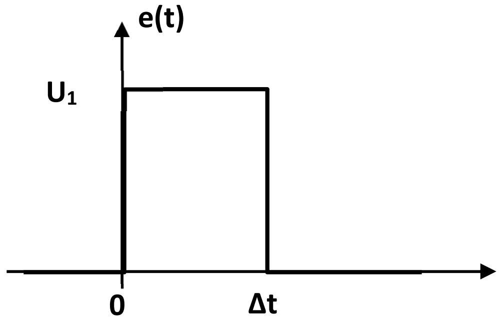
$$r_N = \frac{E_r(C)}{\sum E_f(g\acute{e}n\acute{e}\ i)} = \frac{N}{N+1}$$

et conclure.

II. Étude d'un régime transitoire

Nous considérons le circuit présenté ci-dessous et constitué d'un condensateur de capacité C initialement déchargé et de deux résistances R_1 et R_2. Il est alimenté par un générateur délivrant un signal variable dans le temps e(t). La tension e(t) est un créneau unique d'amplitude $U_1 > 0$ et de durée Δt ayant l'allure présentée ci-dessous.





1. Exprimer $i(t = 0^+)$ en fonction des données.

On suppose Δt suffisamment grand pour que le circuit ait atteint un régime permanent à l'instant Δt^-.

2. Exprimer $u(t = \Delta t^-)$ et $i(t = \Delta t^-)$ en fonction des données.

3. Établir l'équation différentielle vérifiée par u(t) en fonction de R_1, R_2, C et e(t).

4. Préciser la constante de temps τ de ce circuit.

5. Retrouver l'expression de τ par une simplification du circuit.

6. Établir l'expression de u(t) sur l'intervalle de $[0, \Delta t[$ et tracer l'allure de la courbe u(t).

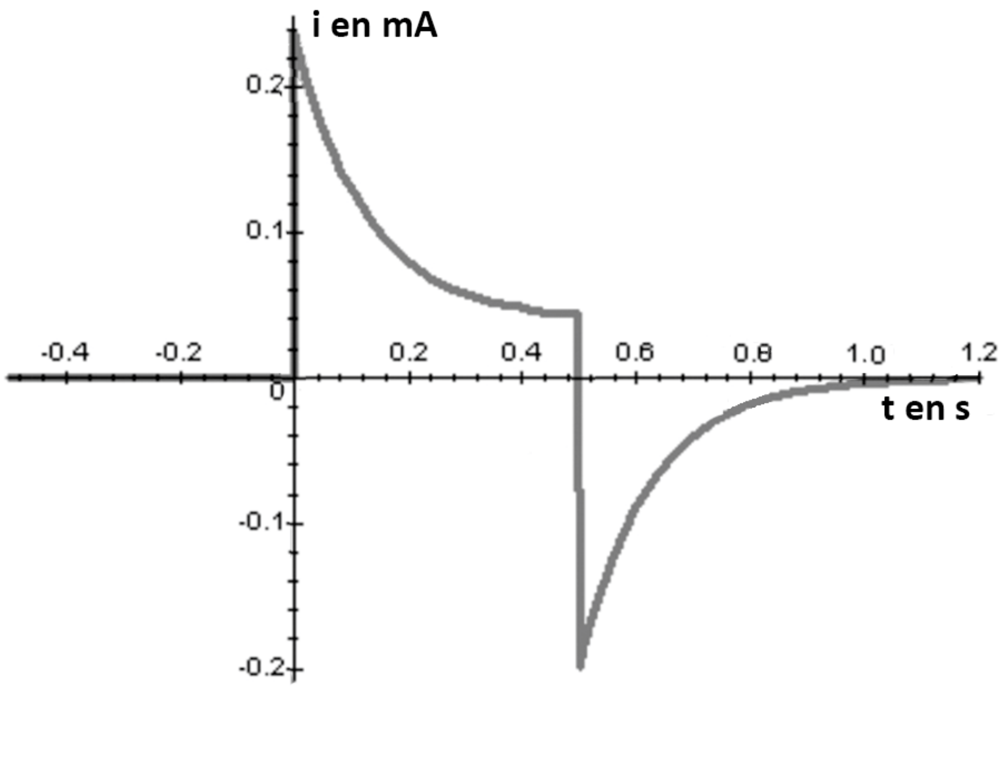
7. Établir l'expression de u(t) pour $t \geq \Delta t$ et prolonger la courbe précédente.

8. En déduire i(t) pour $t \geq \Delta t$ et donner la valeur de $i(t = \Delta t^+)$.

Voici l'enregistrement de i(t) où t est en seconde et i en mA. On donne $U_1 = 5{,}00$ mV.

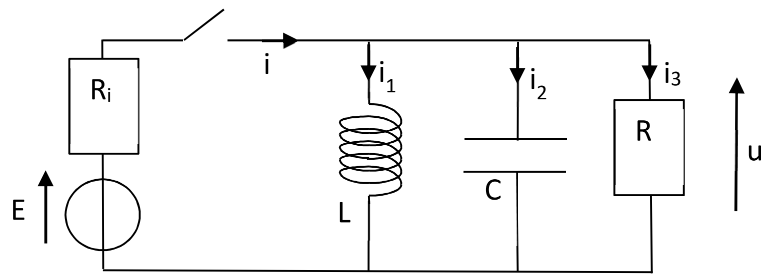
9. Déduire de l'enregistrement les valeurs de R_1 et R_2.

10. Évaluer la précision des grandeurs lues sur le graphique et en déduire $u(R_1)$ et écrire correctement la valeur de R_1.



III. Circuit RLC parallèle alimenté par un échelon de tension :

A l'instant pris comme origine des temps, on ferme l'interrupteur dans le circuit suivant où un circuit RLC parallèle est alimenté par un générateur de tension de f.é.m E et de résistance interne R_i :



A. Valeurs initiales et finales des intensités

1. Justifier que juste avant la fermeture de l'interrupteur u ainsi que tous les courants sont nuls.

2. Déterminer les intensités i_1, i_2, i_3 et i dans les quatre branches, juste après la fermeture de l'interrupteur, en $t = 0^+$.

3. Déterminer les valeurs asymptotiques des intensités i_1, i_2, i_3 et i.

B. Mise en équation et résolution

4. Établir l'équation différentielle vérifiée par i_3 et la mettre sous forme canonique. Donner l'expression des paramètres introduits en fonction de R, L, C et R_i.

5. Quelle relation doit-il exister entre R_i, R, L et C pour que la solution corresponde à un régime pseudo-périodique ? En déduire la valeur limite de L pour R_i = 2,5 kΩ, R = 1,25 kΩ et C = 1,0 µF.

Pour la suite on prendra la valeur L = 20 mH.

Les grandeurs R_i, R, L et C sont connues avec une précision relative de 5%.

6. Calculer numériquement la pulsation propre ω_0 et la fréquence propre f_0 du circuit avec leurs incertitudes.

7. Déterminer numériquement le facteur de qualité Q (sans calculer l'incertitude).

8. Exprimer la pseudo-pulsation Ω des oscillations. Calculer numériquement Ω et la pseudo-période T. Compte-tenu de l'incertitude sur les données, peut-on dire que les valeurs de ω_0 et de Ω sont égales ?

9. Que vaut di_3/dt en $t = 0^+$?

10 Déterminer l'expression complète de $i_3(t)$, en tenant compte des conditions initiales.

11. Déterminer le temps caractéristique d'évolution de l'amplitude de i_3. Faire l'A.N.

12. Calculer numériquement la date t_0 à laquelle i_3 passe pour la première fois par un maximum.

C. Observation à l'oscilloscope et lecture graphique

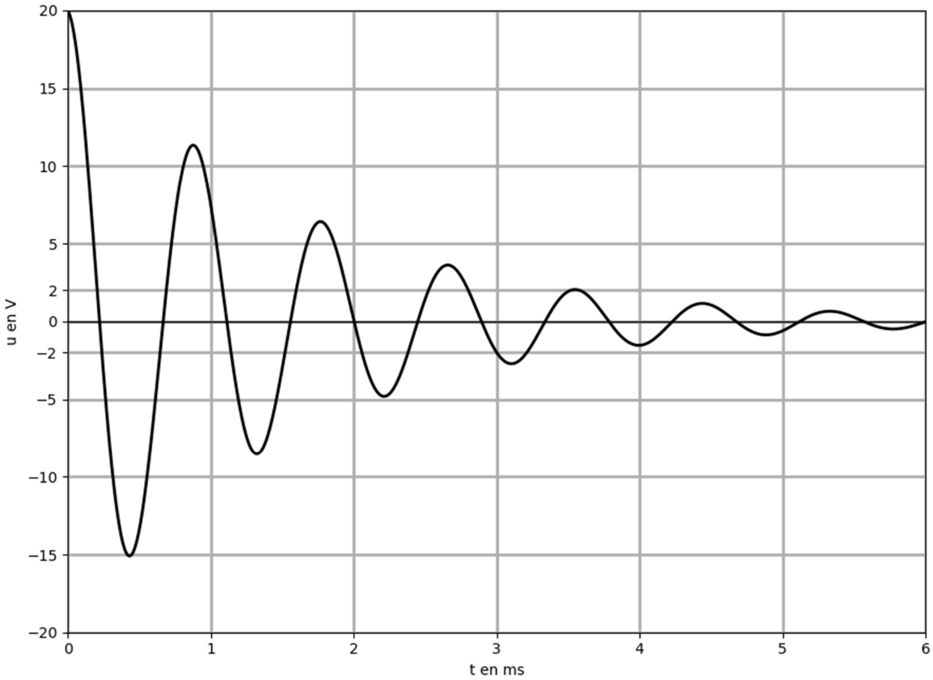
On réalise l'observation de la tension u_R aux bornes de la résistance R. Le GBF est réglé pour délivrer un signal créneau d'amplitude E auquel est ajouté une tension de décalage de valeur E.

13. Tracer l'allure du signal programmé e(t).

14. On souhaite observer le régime transitoire de u_R jusqu'à ce qu'il atteigne sa valeur asymptotique. Quelle est alors la fréquence maximale du GBF ?

0

Voici la courbe obtenue :



15. Déterminer la valeur de la pseudo-période T et du décrément logarithmique défini par :

$$\delta = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{u(t) - u_\infty}{u(t+nT) - u_\infty}\right) \quad avec\ n\ \in \mathbb{N}^*$$

16. En déduire la valeur de Q.

D. Puissance et énergie

17. Exprimer l'énergie $E_r(L)$ reçue par la bobine au cours du régime transitoire.

18. Exprimer l'énergie $E_r(C)$ reçue par le condensateur au cours du régime transitoire.

19. Donner l'expression qu'il faudrait calculer pour déterminer l'énergie E_J dissipée par effet Joule par le résistor R durant le régime transitoire : on ne cherchera pas à calculer cette énergie.

RAPPELS SUR LES INCERTITUDES

Écriture d'un résultat avec incertitude :

$$X = x\,;u(X)$$

Attention à la cohérence des **chiffres significatifs** et à ne pas oublier **l'unité**.

Incertitude-type de type A (répétition N fois de la mesure) :

Le menu STAT de la calculatrice donne la moyenne <x> et l'écart-type Sx des N mesures.

L'incertitude-type de la mesure est donnée par :

$$\boldsymbol{u_A = \frac{S_X}{\sqrt{N}}}$$

Incertitude-type de type B (mesure unique) :

- On détermine le **demi-intervalle** acceptable pour la mesure, noté ***a*** **:**
  - pour une lecture sur une **échelle graduée** (règle, thermomètre gradué, palmer…) :

    $$\boldsymbol{a = 1/2\ graduation}$$

  - pour un **appareil de mesure** à affichage digital (voltmètre, thermomètre électronique, …) :

    a est appelé **précision** et est donné par la **notice**

  - pour un **composant** (résistances, condensateurs, bobines, …) :

    a est appelé **tolérance** et est donné par le **fabricant**

  - pour une **évaluation directe par l'utilisateur** entre x_1 et x_2 :

    $$\boldsymbol{x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad et\ le\ demi-intervalle\ a = \frac{x_2 - x_1}{2}}$$

- Si la mesure est à lecture double : $\boldsymbol{a}$ est multiplié par $\boldsymbol{\sqrt{2}}$

- L'incertitude-type de la mesure est donnée par :

$$\boldsymbol{u_B = \frac{a}{\sqrt{3}}}$$

Comparaison d'une mesure : x_1 ; $u(x_1)$

avec une **valeur de référence** x_{ref}	avec une **autre mesure :** x_2 **;** $u(x_2)$
On détermine l'**écart normalisé** ou **z-score :**	
$\boldsymbol{z = \frac{\lvert x_1 - x_{ref}\rvert}{u(x_1)}}$	$\boldsymbol{z = \frac{\lvert x_1 - x_2\rvert}{\sqrt{u(x_1)^2 + u(x_2)^2}}}$
Si z<2, on considère qu'il y a **compatibilité** **Si z ≥ 2**, on considère qu'il y a **incompatibilité** et il faut **chercher la cause**.	

Propagation des incertitudes dans les calculs

Une seule variable : Y = f(X)

Relation affine :	$si\ \ Y = a\,X + b \quad alors\ \ u(Y) = \lvert a \rvert\, u(X)$
Relation de puissance :	$si\ \ Y = a\,X^n \quad alors\ \ \frac{u(Y)}{Y} = \lvert n \rvert \frac{u(X)}{X}$

Deux variables : Y = f(X_1, X_2)

Combinaison linéaire :	$si\ \ Y = a\,X_1 + b\,X_2 \quad alors\ \ u(Y) = \sqrt{\left(a\,u(X_1)\right)^2 + \left(b\,u(X_2)\right)^2}$
Monôme :	$si\ \ Y = X_1^a\,X_2^b \quad alors\ \ \frac{u(Y)}{Y} = \sqrt{\left(a\frac{u(X_1)}{X_1}\right)^2 + \left(b\frac{u(X_2)}{X_2}\right)^2}$

Cas général : méthode numérique de Monte-Carlo (MC)

```
X1_MC = X1 + u1*sqrt(3)*rd.uniform(-1,1,N)     # création d'un tableau de N valeurs aléatoires
X2_MC = X2 + u2*sqrt(3)*rd.uniform(-1,1,N)     # de même pour X2
Y_MC = f(X1, X2)                               # calcul des N valeurs de Y
moy_Y = np.average(Y_MC)                       # calcul de la moyenne des Y
u_Y = np.std(Y_MC,ddof=1)                      # calcul de l'écart-type = incertitude-type
print(''Y = '', moy_Y, ''+/-'', u_Y)           # affichage
```