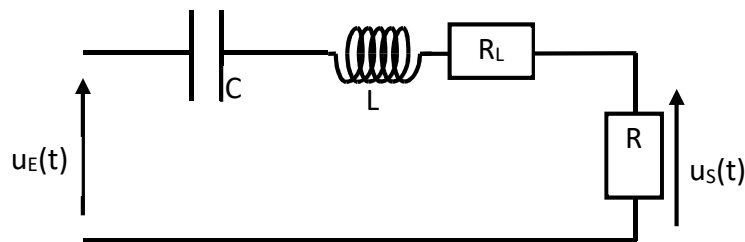


Devoir surveillé n°4 Physique

I. Élimination d'un fond sonore par un filtre RLC série

On étudie dans ce problème un filtre constitué d'un circuit RLC série dont la bobine a pour inductance L et pour résistance de bobinage R_L .

La tension d'entrée $u_E(t)$ et la tension de sortie sont définies sur la figure ci-dessous :



1. Étudier le comportement de ce quadripôle aux basses fréquences puis aux hautes fréquences et en déduire la nature du filtre ainsi réalisé.
2. Établir la fonction de transfert de ce montage et la mettre sous la forme canonique :

$$\underline{H}(x) = \frac{H_0}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right)}$$

avec $x = \omega/\omega_0$ appelée pulsation réduite. Exprimer la pulsation propre ω_0 , le facteur de qualité Q et la constante H_0 .

L'expression de \underline{H} avec H_0 et Q sera utilisée pour la suite du problème.

3. Pour quelle valeur particulière de x , le gain $G(x) = |\underline{H}(x)|$ est-il maximal ? En déduire la valeur maximale du gain en décibels $G_{dB,max}$.
4. On note ω_1 et ω_2 les pulsations de coupure de ce filtre et x_1 et x_2 les pulsations réduites correspondantes. Déterminer x_1 , x_2 et $\Delta x = x_2 - x_1$ en fonction du facteur de qualité Q . Calculer x_1 , x_2 et Δx pour $Q = 0,1$.
5. Établir les équations et les pentes des asymptotes BF puis HF du diagramme de Bode relatif au gain en décibels G_{dB} et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection I pour $Q = 0,1$ en prenant $H_0 = 0,9$.
6. Sur l'annexe n°1 (feuille de papier semi-logarithmique), pour $Q = 0,1$:
 - positionner le point correspondant au gain maximal ; puis au gain en x_1 et x_2 ;
 - positionner le point correspondant à l'intersection des asymptotes BF et HF ;
 - tracer les asymptotes BF et HF du gain en décibels G_{dB} ;
 - en déduire l'allure du diagramme de Bode réel du gain en dB.

7. On souhaite nettoyer l'enregistrement d'une conversation, rendu difficilement audible par des bruits divers. On considère que le spectre de l'audition s'étend de 20 Hz à 20 kHz, tandis que celui de la voix couvre un intervalle plus restreint, allant de 100 Hz à 2 kHz.

Sur l'annexe n°2, tracer le gabarit d'un filtre permettant d'obtenir une atténuation du signal inférieure à 10 dB pour la voix (entre $f_1 = 100$ Hz et $f_2 = 2$ kHz) tout en réduisant le niveau du signal de 40 dB à la limite du spectre audible (c'est à dire pour $f < 20$ Hz et $f > 20$ kHz).

Pour réaliser le nettoyage de la conversation, on utilise un filtre RLC mais à partir de cette question on néglige la valeur de R_L devant R ($R_L = 0$ et donc $H_0 = 1$). La capacité du condensateur est $C = 1,00$ μ F.

8. Que doit valoir la fréquence propre f_0 pour centrer (en échelle logarithmique) la bande passante sur le milieu du spectre de la voix ? En déduire la valeur de l'inductance L de la bobine à utiliser.

9. Le filtre à concevoir doit-il être très sélectif ou, au contraire, peu sélectif ? Faut-il choisir un facteur de qualité faible ou élevé ?

10. Déterminer la valeur à donner au facteur de qualité Q pour que la bande passante à -3 dB de ce filtre s'identifie au spectre de la voix. En déduire la valeur de la résistance R du résistor à utiliser.

11. En utilisant les valeurs de f_0 et Q déterminées précédemment, positionner, sur l'annexe n°2, le point d'intersection des asymptotes BF et HF du diagramme asymptotique, tracer les asymptotes BF et HF et en déduire le diagramme de Bode relatif au gain en décibels G_{dB} complet. Ce filtre réalise-t-il le cahier des charges ?

Pour réaliser le cahier des charges il faudrait placer plusieurs filtres RLC identiques en cascades.

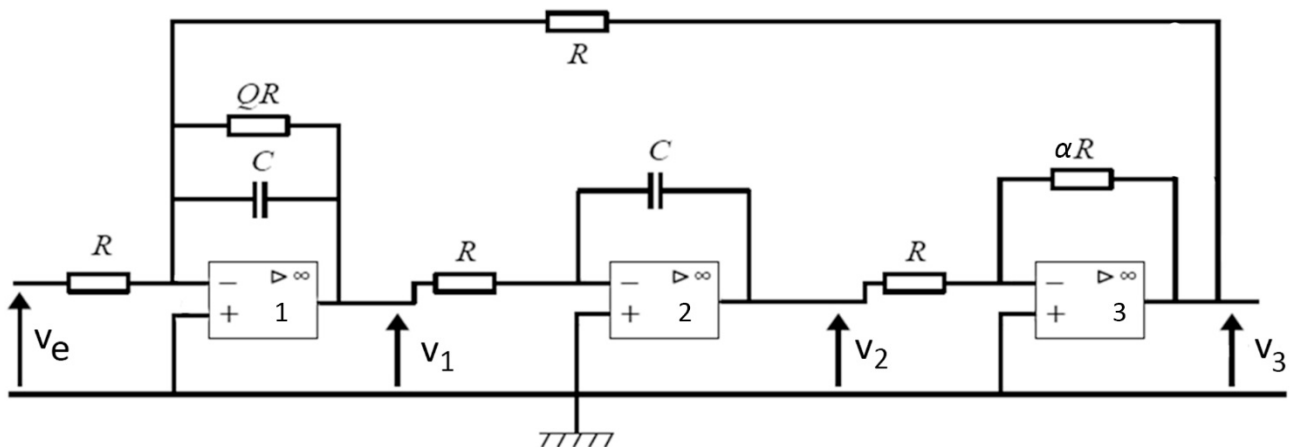
12. Exprimer les impédances d'entrée \underline{Z}_E et de sortie \underline{Z}_S du quadripôle RLC.

13. Calculer le module de ces impédances pour $f = 2$ kHz. La condition d'association des filtres en cascades est-elle vérifiée ?

14. Proposer une solution pour associer les filtres RLC en cascade.

II. Cellule de filtrage de Tow et Thomas

On souhaite étudier le montage représenté ci-dessous, appelé "cellule de Tow et Thomas".



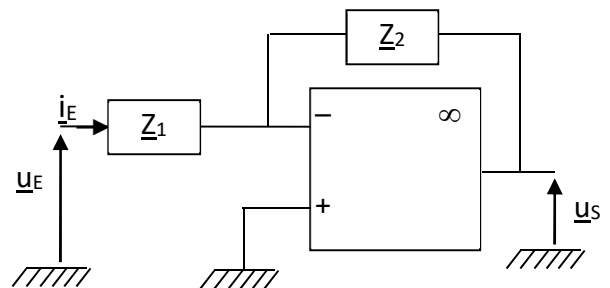
On supposera que les trois ALI utilisés peuvent être considérés comme idéaux et qu'ils fonctionnent tous les trois en régime linéaire.

A. Questions préliminaires

1. Donner les caractéristiques d'un ALI fonctionnant en régime linéaire.

2. Montrer que la fonction de transfert du montage ci-contre est donnée par :

$$\underline{H} = \frac{u_S}{u_E} = - \frac{Z_2}{Z_1}$$



- 3. Définir et déterminer son impédance d'entrée \underline{Z}_e .
- 4. D'où provient l'énergie électrique d'un filtre actif à base d'ALI ?

B. Retour sur la cellule de Tow et Thomas

- 5. Déterminer la relation imposée entre v_2 et v_3 par l'ALI n°3. Quelle est la fonction de ce filtre ?
- 6. Déterminer la relation imposée entre v_1 et v_2 par l'ALI n°2. Quelle est la fonction de ce filtre ?

C. Détermination des paramètres du filtres

On indique que la fonction de transfert du filtre associant la tension v_e en entrée et la tension v_3 en sortie est la suivante (démonstration non demandée) :

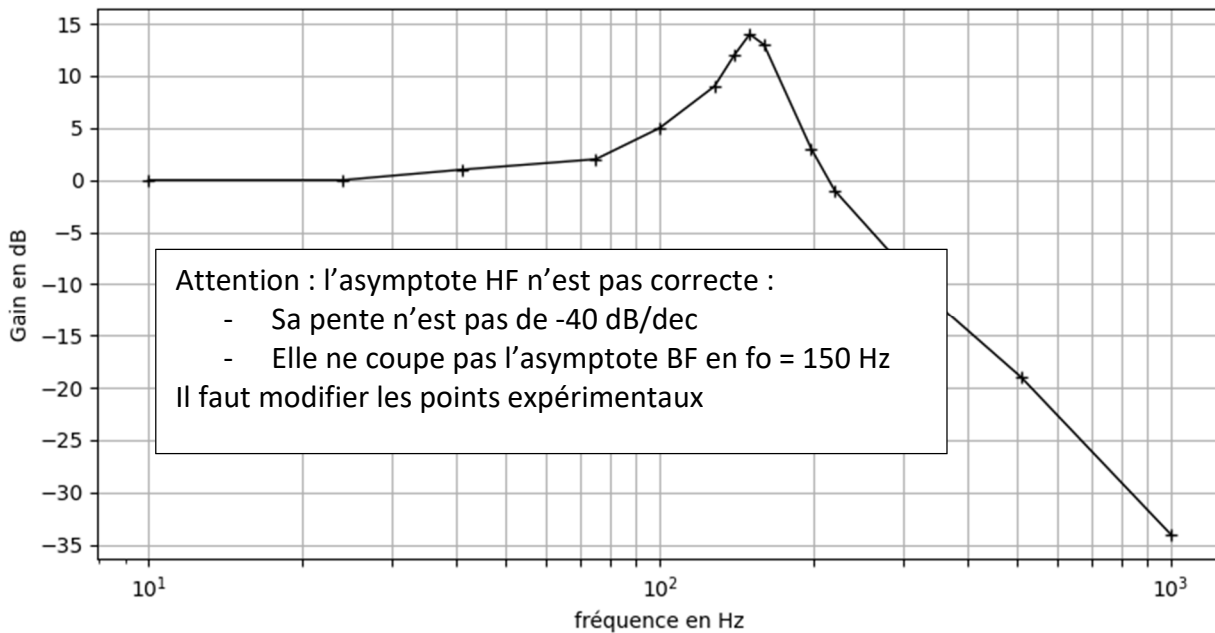
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{v_3}{v_e} = - \frac{1}{1 + j \frac{RC\omega}{\alpha Q} - \frac{R^2 C^2 \omega^2}{\alpha}}$$

Pour la suite $\alpha = 1$. En posant $x = RC\omega$, on peut écrire :

$$\underline{H}(jx) = - \frac{1}{1 + j \frac{x}{Q} - x^2}$$

7. Montrer que, à la condition que $Q > 1/\sqrt{2}$, le module de \underline{H} passe par un maximum pour $x = \sqrt{1 - 1/(2Q^2)}$.
8. Calculer le module de \underline{H} pour $x = 1$.

Une étude en TP permet de réaliser le diagramme de Bode du gain en dB ci-dessous :

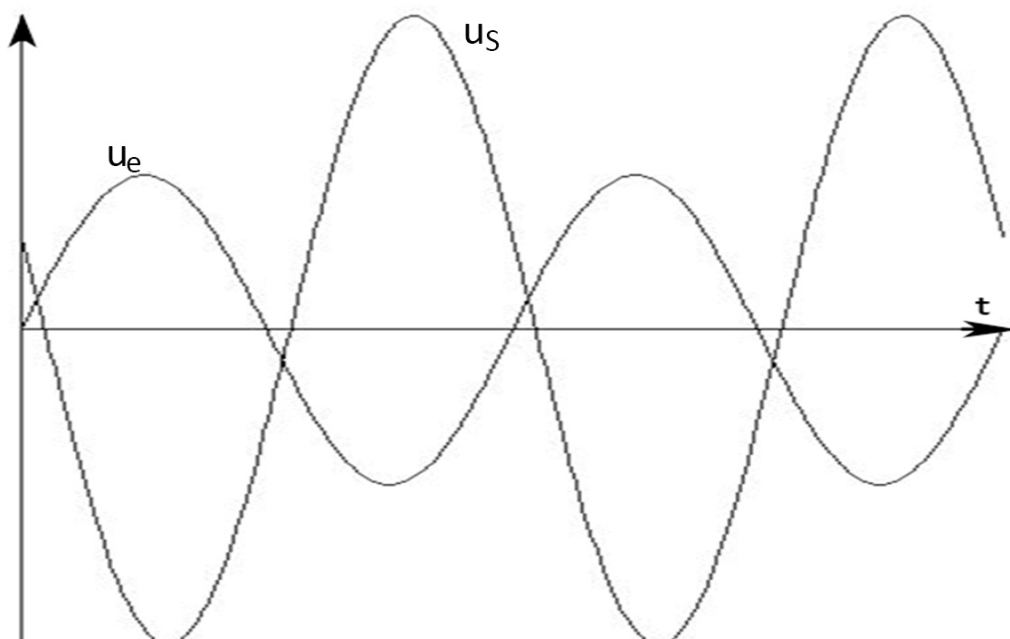


9. Exploiter le diagramme fourni pour évaluer les valeurs du facteur de qualité Q et du produit RC dont on précisera l'unité.

D. Détermination d'une fréquence à partir d'un oscillogramme

La figure de la page suivante représente les tracés de l'entrée $v_e(t)$ et de la sortie $v_s(t)$ obtenus à l'oscilloscope (le même calibre vertical est utilisé sur les deux voies).

10. Déterminer le déphasage de la sortie par rapport à l'entrée. [Pensez à justifier le signe !]
11. Déterminer de même le gain G_{dB} du montage pour cette fréquence.
12. En déduire la fréquence des signaux à l'aide de G_{dB} .



III. Étude thermique d'un bâtiment (d'après CCP MP 2016) :

Le problème porte sur l'étude thermique d'une pièce qui sera menée grâce à une analogie entre les phénomènes thermiques et électriques.

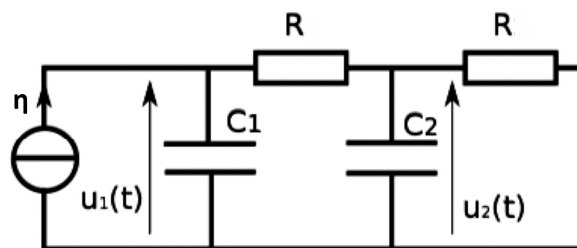
On admet que l'équivalent électrique de la température est le potentiel électrique tandis que l'équivalent électrique de la puissance thermique est l'intensité. La résistance thermique est l'analogue de la résistance électrique et la capacité thermique joue le rôle de la capacité d'un condensateur. Les équivalents électriques des radiateurs sont les générateurs de courant et les thermostats imposent une température de la même façon qu'un générateur de tension impose une différence de potentiel. En exploitant ces équivalences, les lois de la diffusion thermique et de l'électrocinétique obéissent aux mêmes équations différentielles.

Grandeurs thermiques	Température (en K)	P_{th} (en W)	$R_{th} = \Delta T/P_{th}$ (en $K.W^{-1}$)	C_{th} (en $J.K^{-1}$)	Radiateur électrique	Thermostat
Grandeurs électriques	Potentiel électrique (en V)	Intensité (en A)	$R = \Delta V/I$ (en Ω)	C (en F)	Générateur de courant	Générateur de tension

Numériquement, on fait correspondre 1 V à 1°C et 1 A à 1 W. Il en découle qu'une capacité thermique de 1 $J.K^{-1}$ correspond à une capacité électrique de 1 F et une résistance thermique de 1 $K.W^{-1}$ est analogue à une résistance électrique de 1 Ω .

Le problème porte sur l'étude d'une pièce contenant de l'air de capacité thermique $C_{air} = 1,2 \times 10^5 J.K^{-1}$ et un radiateur électrique. La pièce est fermée par des murs de résistance thermique $R_{mur} = 1,6 \times 10^{-3} K.W^{-1}$ et de capacité thermique $C_{mur} = 2 \times 10^7 J.K^{-1}$.

On modélise l'ensemble du système, composé de la pièce, du mur et du radiateur, par le réseau électrique suivant :



avec $R = 8 \times 10^{-4} \Omega$ (analogue électrique de $R_{mur}/2$), $C_1 = 1,2 \times 10^5 F$ (analogue électrique de C_{air}) et $C_2 = 2 \times 10^7 F$ (analogue électrique de C_{mur}).

L'origine des potentiels (la masse) correspond à la température extérieure T_{ext} et la tension u_1 est dont l'analogue de l'écart de température entre l'intérieur de la pièce et la température extérieure.

L'air extérieur est à la température constante $T_{ext} = 10^\circ C$.

Le chauffage ne délivre pas une puissance thermique constante : η est une fonction périodique du temps $\eta(t)$.

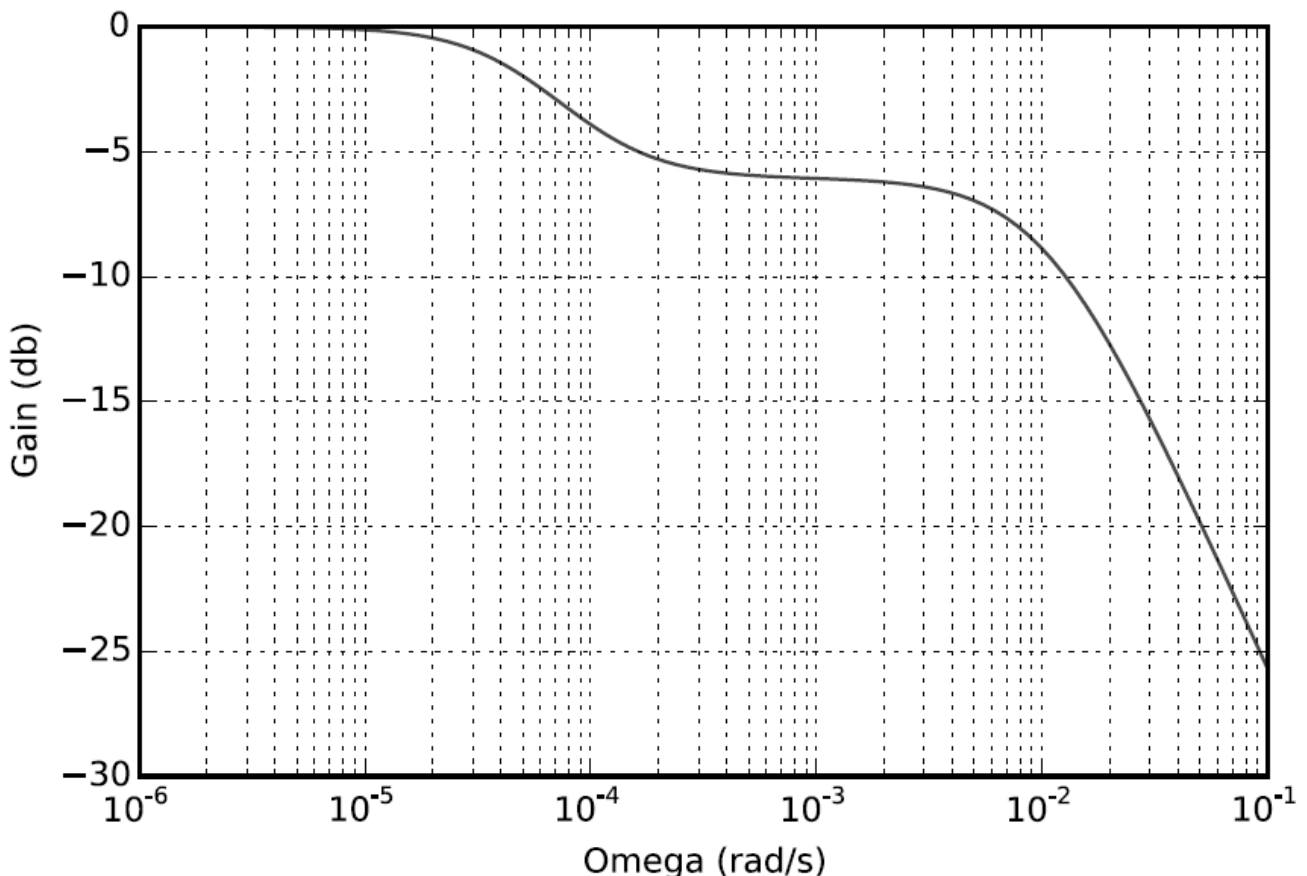
Afin d'étudier le comportement du circuit en régime variable, on se place initialement en régime sinusoïdal forcé de pulsation ω :

$$\eta(t) = \eta_0 \cos(\omega t)$$

1. Exprimer l'impédance $Z_{\text{éqv},1}$ équivalente à l'association en dérivation de la résistance R et du condensateur de capacité C_2 .
2. Exprimer l'impédance $Z_{\text{éqv},2}$ équivalente à l'association en série de la résistance R et de l'impédance $Z_{\text{éqv},1}$.
3. Montrer que la relation liant la tension complexe \underline{u}_1 au courant électromoteur complexe $\underline{\eta}$ peut se mettre sous la forme :

$$\underline{u}_1 = \frac{\left(1 + j\frac{RC_2}{2}\omega\right)}{1 + jR(2C_1 + C_2)\omega - R^2C_1C_2\omega^2} 2R\underline{\eta}$$

4. Vérifier la cohérence entre l'expression de \underline{u}_1 et le comportement du circuit pour les basses fréquences. On notera par la suite, U_0 l'amplitude de u_1 aux très basses fréquences.
5. On appelle fonction de transfert $\underline{H}(\omega) = \underline{u}_1(\omega)/U_0$. Quelle est la nature du filtre ?
6. Établir les expressions des asymptotes du gain en dB en basse fréquence et haute fréquence.
7. Tracer sur la copie, l'allure du diagramme de Bode asymptotique du gain en précisant bien le point I d'intersection des asymptotes (ω_I et $G_{\text{dB},I}$).
8. En réalité, l'étude détaillée de la fonction de transfert donne le diagramme de Bode suivant :

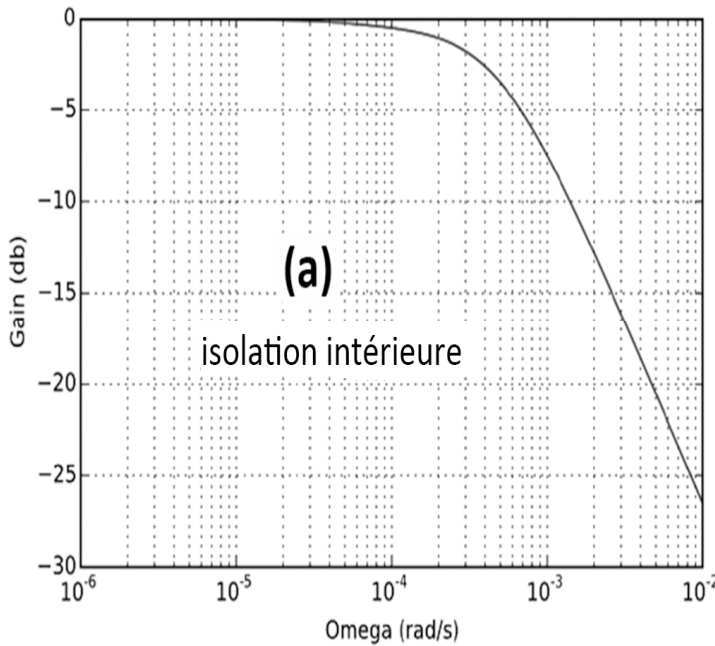


Définir la pulsation de coupure du filtre et relever sa valeur graphiquement.

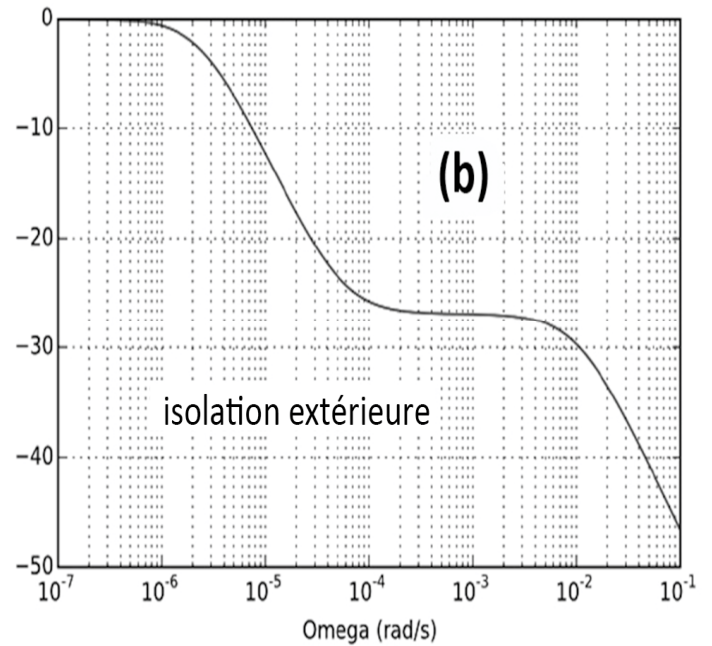
Afin de limiter sa consommation énergétique, le propriétaire décide d'isoler la pièce.

Il peut disposer l'isolant ($R_{isol} = \beta \times R$ avec $\beta = 10$) à l'intérieur ou à l'extérieur du mur.

On obtient les diagrammes de Bode suivants :



(a) correspond à l'isolation intérieure



(b) correspond à l'isolation extérieure

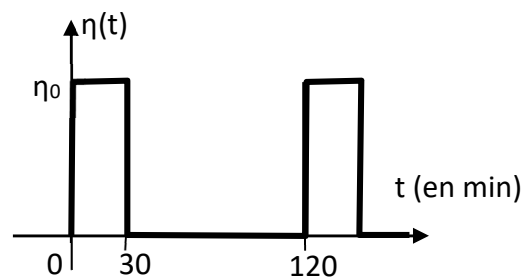
9. Déterminer la pulsation ω_{jour} des fluctuations jour/nuit de la température extérieure en la supposant sinusoïdale.

10. Ces isolations permettent-elles d'amortir significativement les fluctuations jour/nuit de la température extérieure ?

Le radiateur est maintenant dans un mode de fonctionnement périodique non sinusoïdal :

il reste allumé à sa puissance maximale pendant 30 minutes puis reste à l'arrêt pendant 1h30.

Voici l'allure de $\eta(t)$:



Et voici la décomposition de Fourier de $\eta(t)$:

$$\eta(t) = \frac{\eta_0}{4} + \frac{\eta_0}{\pi} \left(\sqrt{2} \cos(\omega_1 t) + \cos(2\omega_1 t) + \frac{\sqrt{2}}{3} \cos(3\omega_1 t) + \dots \right)$$

11. A quoi correspond le terme $\eta_0/4$?

12. Quelle est la valeur numérique de ω_1 ?

13. Dans le cas des diagrammes de Bode **a** et **b**, déterminer l'amplitude des variations de $u_1(t)$ (qui correspondent également aux variations de la température de la pièce). Est-il préférable de réaliser une isolation intérieure ou extérieure de sa maison pour limiter les fluctuations de température durant une journée de 24h ?

