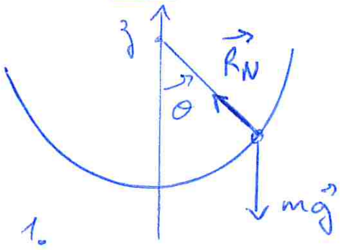
PCSI 1 21-22

DS n° 5

I Mouvement sur un rail circulaire



1. Syst : la perle Ref : terrestre considéré galiléen

Forces : $m\vec{g}$ et $\vec{R_N}$

avec $m\vec{g} = \begin{vmatrix} mg\cos\theta \\ -mg\sin\theta \end{vmatrix}_{\vec{e_r}\,\vec{e_\theta}}$ et $\vec{R_N} = \begin{vmatrix} -\|\vec{R_N}\| \\ 0 \end{vmatrix}_{\vec{e_r}\,\vec{e_\theta}}$

2. Appliquons le PFD à la perle : $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R_N}$

Selon $\vec{e_\theta}$: $mR\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$ car $\vec{a} = \begin{vmatrix} -R\dot{\theta}^2 \\ R\ddot{\theta} \end{vmatrix}_{\vec{e_r}\,\vec{e_\theta}}$ pour une traj. circulaire.

D'où $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\sin\theta = 0}$ c'est la m̂ éq. diff. que le pendule.

3. Si $\forall t$, $|\theta| \ll 1$ rad alors $\sin\theta \simeq \theta$ (à l'ordre 2 en θ).

D'où $\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\theta = 0$: c'est un oscillateur harmonique

La solution est $\theta(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$ avec $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}}}$

CI : $\theta(0) = 0 = A$

$\dot{\theta}(0) = \frac{V_0}{R} = \omega_0 B$ $\Rightarrow$ $\boxed{\theta(t) = \frac{V_0}{R\omega_0}\sin(\omega_0 t)}$

4. Il y a isochronisme : la période est indépendante de l'amplitude et vaut $\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} = 1{,}42\ s}$

5. Pour que θ reste inférieur à θ_{max}, il faut : $\frac{V_0}{R\omega_0} < \theta_{max}$

D'où $\boxed{V_0 < R\omega_0\theta_{max} = 0{,}96\ m.s^{-1}}$ (⚠ θ_{max} en rad pour l'AN)

6. On ajoute la force $\vec{f} = -\lambda\vec{v} = -\lambda R\dot{\theta}\vec{e_\theta}$ et l'équation devient : $mR\ddot{\theta} + \lambda R\dot{\theta} + mg\sin\theta = 0$.

$\xrightarrow{\theta \ll 1\ rad}$ $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{\lambda}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{R}\theta = 0}$

7. Il s'agit d'un osc. h avec frot^t fluide.
Le mvt est pseudo périodique si les racines de l'équation caractéristique sont complexes. Il faut donc $\Delta < 0$.
Or $\Delta = \left(\frac{\lambda}{m}\right)^2 - 4\left(\frac{g}{R}\right) \Rightarrow$ il faut $\boxed{\lambda < 2m\sqrt{\frac{g}{R}}}$.

$\boxed{\lambda < 0{,}44 \ \underbrace{N.m^{-1}.s}_{kg.s^{-1}}}$

8. $r_{1/2} = -\frac{\lambda}{2m} \pm i\frac{\sqrt{\Delta}}{2} = -\frac{\lambda}{2m} \pm i\omega_0\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{4m^2\omega_0^2}}$.

On pose $\Omega = \omega_0\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{4m^2\omega_0^2}} = \boxed{\sqrt{\frac{g}{R}} \cdot \sqrt{1-\frac{\lambda^2R^2}{4m^2g^2}} = \Omega}$

et $\boxed{\tau = \frac{2m}{\lambda}}$ $\Rightarrow \theta(t) = e^{-t/\tau}.(B\cos\Omega t + A\sin\Omega t)$

CI : $\theta(0) = 0 = B$

$\dot{\theta}(0) = -\frac{B}{\tau} + \Omega A = V_0/R \Rightarrow \boxed{A = \frac{V_0}{R\Omega}}$.

On obtient bien $\boxed{\theta(t) = A e^{-t/\tau}\sin(\Omega t)}$

9. $\delta = \ln\left(\frac{Ae^{-t/\tau}\sin\Omega t}{Ae^{-\frac{t+T}{\tau}}\sin\Omega(t+T)}\right) = \ln e^{T/\tau} = \frac{T}{\tau} = \boxed{\frac{\lambda T}{2m} = \delta}$

On lit $\boxed{T = \frac{2{,}4}{2} = 1{,}2 \ s}$. et $\delta = \ln\frac{0{,}2}{0{,}1} = \ln 2 = \boxed{0{,}69 = \delta}$

D'où $\boxed{\lambda = \frac{2m\delta}{T} = 0{,}057 \ kg.s^{-1}}$ $\underline{R}$: $T \neq T_0$ de la q. 4

10. Un peu de géométrie ! On sait que le triangle ACM est rectangle et que l'angle $(\widehat{CAM})$ vaut $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$. [C'est M^{me} Rhin qui me l'a dit :-) donc $\boxed{AM = 2R\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}$

11. Le bilan de force fait apparaître $\vec{F} = -k\,\vec{AM}$ dont l'energie potentielle associée est $\mathcal{E}_{p,e} = \frac{1}{2}k.AM^2$. (origine en A)

Pour le poids, $\mathcal{E}_{pp} = mgz$ (origine en $z=0$) avec $z = R\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = R\sin\theta$

D'où $\boxed{\mathcal{E}_{p,tot} = mgR\sin\theta + 2kR^2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}$

12. Appliquons le TEM entre le point B et le point θ_{max} :

$\Delta \mathcal{E}_m = W(\vec{R}_N)$ or $\vec{R}_N \perp d\vec{OM}$ donc $W(\vec{R}_N) = 0$

D'où $\mathcal{E}_m(B) = \mathcal{E}_m(\theta_{max})$ avec $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m v^2 + \mathcal{E}_{p\,tot}$.

$$\frac{1}{2} m v_B^2 + kR^2 = mgR\sin\theta_{max} + 2kR^2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta_{max}}{2}\right)$$

D'où $k = \dfrac{\frac{1}{2} m v_B^2 - mgR\sin\theta_{max}}{2R^2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta_{max}}{2}\right) - R^2} = 0,87 \text{ N.m}^{-1}$

13. On veut que $\mathcal{E}_c(C) > 0$ d'où le TEM entre B et C :
$(\theta_B = 0 ; \theta_C = \pi/2)$

$$\frac{1}{2} m v_B^2 + kR^2 = mgR + 2kR^2 + \mathcal{E}_c(C)$$

D'où : $\boxed{v_B > \sqrt{2gR + 2\frac{k}{m}R^2} = 4,3 \text{ m.s}^{-1}}$

14. Les positions d'équilibre correspondent à $\dfrac{d\mathcal{E}_p}{d\theta} = 0$.

D'où $mgR\cos\theta + 2kR^2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) = 0$

$$mg\cos\theta + kR\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 0$$

$\Rightarrow (mg + kR).\cos\theta = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l}\theta_{éq_1} = \pi/2 \text{ rad} \\ \theta_{éq_2} = -\pi/2 \text{ rad.}\end{array}}$

La position est stable si $\dfrac{d^2\mathcal{E}_p}{d\theta^2}(\theta_{éq}) > 0$:

or $\dfrac{d^2\mathcal{E}_p}{d\theta^2} = -(mg + kR)\sin\theta$ donc $\boxed{\dfrac{d^2\mathcal{E}_p}{d\theta^2}(\theta_{éq_1}) = -(mg + kR) < 0 \Rightarrow \theta_{éq} = \frac{\pi}{2} : \text{instable}}$

C'est cohérent avec l'intuition : le seul point stable est A. $\boxed{\dfrac{d^2\mathcal{E}_p}{d\theta^2}(\theta_{éq_2}) = +(mg + kR) > 0 \Rightarrow \theta_{éq} = -\pi/2 : \text{stable.}}$

15. Autour de $\theta_{éq_2} = -\frac{\pi}{2}$ rad, $\mathcal{E}_p(\theta) \simeq \mathcal{E}_p(-\frac{\pi}{2}) + (mg + kR)\dfrac{(\theta - \theta_{éq})^2}{2}$

approximat° parabolique de $\mathcal{E}_p = DL_2(\theta_{éq})$

De plus $\mathcal{E}_m$ se conserve donc $\dfrac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0$

D'où $\frac{1}{2} m R^2 2\dot\theta\ddot\theta + 0 + (mg + kR)\dot\theta(\theta - \theta_{éq}) = 0$

$\Rightarrow$ OH : $\boxed{\ddot\theta + \dfrac{mg + kR}{mR^2}\theta = \dfrac{mg + kR}{mR^2}\theta_{éq}}$ $\boxed{T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = \dfrac{2\pi\sqrt{mR^2}}{\sqrt{mg + kR}} = 0,72 \text{ s.}}$

II Le Millénium Bridge.

1. <u>Syst:</u> le pont <u>Réf</u>: terrestre considéré galiléen.

<u>Forces:</u> $m\vec{g}$, $-\alpha \dot{x} \vec{u}_x$, $\vec{F} = -k(x - l_0)\vec{u}_x$.

<u>A l'équilibre:</u> $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ donc, en projection selon $\vec{u}_x$:

$$0 = -mg + 0 - k(x_{éq} - l_0) \quad (\text{car } \dot{x} = 0 \text{ à l'équilibre})$$

$$\Rightarrow \boxed{x_{éq} = l_0 - \frac{mg}{k}} \text{ (H)}$$

<u>R:</u> on a bien $x_{éq} < l_0$.

2. <u>PFD:</u> $m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} - k(x - l_0) - mg$

or $0 = 0 - k(x_{éq} - l_0) - mg$

donc $m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} - k(x - x_{éq})$

Posons $X = x - x_{éq}$. On a $\dot{X} = \dot{x}$ et $\ddot{X} = \ddot{x}$:

$$\boxed{\ddot{X} + \frac{\alpha}{m}\dot{X} + \frac{k}{m}X = 0}$$

C'est de la forme demandée avec $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ et $2\xi\omega_0 = \frac{\alpha}{m}$.

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \text{pulsation propre} \\ \xi = \frac{\alpha}{2m\omega_0} = \frac{\alpha}{2\sqrt{km}} = \text{facteur lié à l'amortissement} \end{array}}$$

3. Le terme devant $\dot{X}$ est généralement noté $\frac{\omega_0}{Q}$

On voit donc que $\boxed{\xi = \frac{1}{2Q}}$ (ξ est une notation très utilisée en SI.)

2)a. Définition de $\mathcal{E}_p$: $d\mathcal{E}_p = -\delta W = -\vec{F}.d\vec{OM} \Leftrightarrow \mathcal{E}_p = -\int \vec{F}.d\vec{OM}$

ou

$\vec{F} = -\vec{grad}\, \mathcal{E}_p$

$\mathcal{E}_p$ est définie à une constante près [$\Rightarrow$ on peut choisir l'origine].

2)b. $\mathcal{E}_p$ facilite le calcul de $W(\vec{F})$.

En effet $\boxed{W_{AB}(\vec{F}) = -\Delta_{AB}\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_p(A) - \mathcal{E}_p(B)}$.

2)c. $\mathcal{E}_p(m\vec{g}) = mgx + C$ or $\mathcal{E}_p(x=0) = 0$ donc $C = 0$

$$\boxed{\mathcal{E}_p(m\vec{g}) = mgx}$$

4. L'équation devient : $\ddot{X} + \left(2\xi\omega_0 - \frac{\beta}{m}\right)\dot{X} + \omega_0^2 X = 0$

Si $2\xi\omega_0 - \frac{\beta}{m} < 0$, il y a amplification des oscillations (au lieu de l'amortissement vu précédemment).

[la partie réelle des racines de l'EC devient positive !]

5. En ajoutant $\vec{F}$ au bilan de forces, le PFD selon $\vec{u_x}$ donne :

$$m\ddot{X} + \alpha\dot{X} + kX = -F_0 - F_1\cos(2\pi f t)$$

Or $Y = X + \frac{F_0}{m\omega_0^2} = X + \frac{F_0}{k}$, $\dot{Y} = \dot{X}$ et $\ddot{Y} = \ddot{X}$

D'où $m\ddot{Y} + \alpha\dot{Y} + k\left(X + \frac{F_0}{k}\right) = -F_1\cos(2\pi f t)$

Soit $\ddot{Y} + \underbrace{\frac{\alpha}{m}}_{2\xi\omega_0}\dot{Y} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2} Y = -\frac{F_1}{m}\cos(2\pi f t)$

6. En notations complexes, on a : $\underline{Y}(-\omega^2) + j\omega 2\xi\omega_0\underline{Y} + \omega_0^2\underline{Y} = -\frac{F_1}{m}$.

Donc $\boxed{\underline{H} = \frac{\underline{Y}}{\underline{E}} = \frac{-1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2j\omega\xi\omega_0}}$* C'est un passe bas du $2^{\text{ème}}$ ordre.

7. Une résonance peut se produire si $|\underline{H}|$ passe par un maximum. Or $|\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\omega^2\xi^2\omega_0^2}}$.

$$\frac{d|\underline{H}|}{d\omega} = 0 \iff 2(\omega_0^2-\omega^2)(-2\omega) + 4\times 2\omega\times\xi^2\omega_0^2 = 0$$

$$\iff \omega^2 = \omega_0^2(1-2\xi^2).$$

Il n'existe de solution que si $2\xi^2 < 1$ donc $\boxed{\xi < \frac{1}{\sqrt{2}}}$

[Cela correspond bien au cas où $Q = \frac{1}{2\xi} > \frac{1}{\sqrt{2}}$]

On a alors $\boxed{\omega_r = \omega_0\sqrt{1-2\xi^2}}$

Dans le cas où $\xi \ll 1$ (donc $Q \gg 1$), on a $\omega_r \simeq \omega_0$ et

$$\boxed{|\underline{H}(\omega_r)| \simeq \frac{1}{2\xi\omega_0^2}}$$

8. On lit $\boxed{\omega_0 = 12\ rad\,s^{-1}}$ et $20\log\frac{1}{2\xi} = 9dB \Rightarrow \boxed{\xi = 0{,}18}$ [On a bien $\xi^2 \ll 1$.]

* On remarque que $\underline{H}$ n'est pas sans dimension ici : $[\underline{H}] = T^2$!

9. Si l'excitation a une fréquence proche de celle de résonance, il peut (si $\xi \ll 1$ ou $Q \gg 1$) y avoir une forte amplification et des oscillations de grande amplitude $\Rightarrow$ inconfort + risque de rupture.

10. Les fréquences les + importantes sont : $\boxed{f_1 = 2\,Hz}$ et ses harmoniques à $\boxed{f_n = 2n\,Hz}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
Effectivement on pose un pied par terre chaque demi seconde en moyenne $\Rightarrow$ $\boxed{T_1 = 0{,}5\,s = \frac{1}{f_0}}$.
La présence des harmoniques provient de la forme non sinusoïdale de l'excitation.

[R : un pendule de longueur 1 m a une période de $T = 2\,s$ (On dit qu'il bat la seconde car il est en $\pm\theta_{Max}$ à chaque seconde).
La jambe peut donc être assimilée, dans la marche d'un piéton, à un pendule.
L'ensemble des 2 jambes conduit à une force sur le sol de période 0,5 s. C'est cohérent.]

11. $\omega_0 = 12\,rad\,s^{-1} \Rightarrow \boxed{f_0 = 1{,}9\,Hz. \simeq f_1}$
Les piétons provoquent une excitation à une fréquence proche de la fréquence propre du pont : il y a amplification du déplacement du pont $\Rightarrow$ oscillations fortes et désagréables pour les piétons. (= résonance)
L'amortisseur est un 2nd oscillateur couplé au pont.
Il apparait alors 2 pulsations propres mais elles se sont éloignées de f_0 (2,4 Hz et 1,3 Hz) et il y a une antirésonnance en f_0 ($|\underline{H}|$ passe par un minimum en f_0) $\Rightarrow$ il n'y a plus d'amplification de l'excitation.

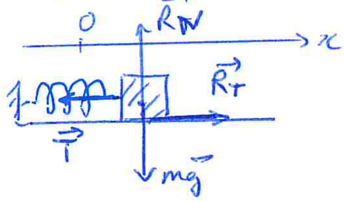
III Oscillateur de relaxation.

1. Loi de Coulomb : - s'il y a glissement alors $\|\vec{R_T}\| = \lambda \|\vec{R_N}\|$

- l'immobilité n'est possible que si $\|\vec{R_T}\| < \lambda \|\vec{R_N}\|$.

2. Syst : L'objet M. Réf : terrestre considéré galiléen

Forces : $m\vec{g}$, $\vec{R_N}$, $\vec{T} = -kx\,\vec{e_x}$ et $\vec{R_T}$.



On a $\vec{v} = \vec{cte}$ donc $x = v_0 t + c_1$

or $x(0) = 0 = c_1$ donc $c_1 = 0$: $\boxed{x(t) = v_0 . t}$ phase 1

Le PFD donne $m\vec{a} = \vec{0} = m\vec{g} + \vec{R_N} + \vec{R_T} - kx\,\vec{e_x}$

Selon $\vec{e_z}$: $0 = \|\vec{R_N}\| - mg$

Selon $\vec{e_x}$: $0 = \|\vec{R_T}\| - kx$ d'où $\boxed{\|\vec{R_T}\| = +kx = +kv_0 t}$

L'immobilité n'est possible que si $\|\vec{R_T}\| < \lambda \|\vec{R_N}\|$

Donc il faut $kv_0 t < \lambda mg$

D'où $\boxed{t_1 = \dfrac{\lambda mg}{k v_0}}$. R : on peut commenter l'influence des paramètres !

3. Le système est le même, mais cette fois $\|\vec{R_T}\| = \lambda \|\vec{R_N}\| = \lambda mg$

et $\dot{x} \neq cte$: $m\ddot{x} = -kx + \lambda mg$ (⚠ attention à l'orientat° de $\vec{R_T}$)

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m} x = \lambda g}$$

4. On introduit $t' = t - t_1$.

On a $x(t'=0) = vt_1 = \dfrac{\lambda mg}{k}$ et $\dot{x}(t'=0) = v_0$.

La solution est $x = \dfrac{\lambda mg}{k} + A\cos\omega_0 t' + B\sin\omega_0 t'$

avec $\dfrac{\lambda mg}{k} = \dfrac{\lambda mg}{k} + A$ et $v_0 = \omega_0 B$ $\boxed{\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}}$

D'où $A = 0$ et $\boxed{x(t') = \dfrac{\lambda mg}{k} + \dfrac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t'}$

5. A t_2' on a : $\dot{x}(t_2') = v_0 = v_0 \cos(\omega_0 t_2')$

D'où $\omega_0 t_2' = 2\pi$ $\Rightarrow t_2' = \frac{2\pi}{\omega_0}$ et $\boxed{t_2 = t_1 + \frac{2\pi}{\omega_0}}$

6. $x(t_2') = \frac{\lambda m g}{k} = x(t_1)$

Or, en ce point, $\|\vec{R_T}\| = \lambda \|\vec{R_N}\|$ et l'objet ne reste donc pas immobile : il repart pour une oscillation complète.

7. On a un oscillateur d'amplitude constante en présence de frottement. En effet lors d'une oscillation la force de frot^t $\vec{R_T}$ fournit un travail négatif tant que $\dot{x} < 0$ mais un travail positif tant que $\dot{x} > 0$ car $\vec{R_T}$ ne change pas de signe ici ($\dot{x} \leq v_{tapis}$ donc le glissement est toujours ds le m̂ sens !). Sur une oscillation complète, on a bien $W(\vec{R_T}) = 0$.