Samedi 5 février 2022

Devoir surveillé n°5
Physique

I. Mouvement sur un rail circulaire (d'après les petites Mines 2010) **:**

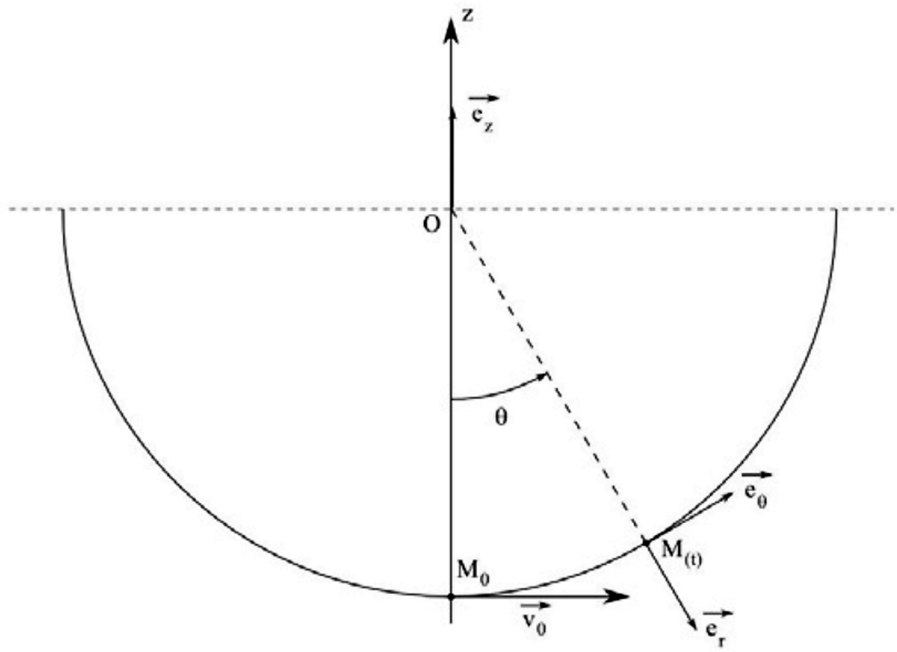
Une petite perle, assimilée à un point matériel M de masse m = 50 g, est enfilée sur un rail et peut coulisser sans frottement.

Le rail a la forme d'un demi-cercle de centre O et de rayon R = 50 cm, placé dans un plan vertical ; il est fixe dans le référentiel d'étude supposé galiléen.

On repère la position du point M à l'instant t par l'angle θ(t) = $(-\vec{e}_Z, \overrightarrow{OM})$.

À l'instant t = 0, l'objet est lancé du point M_0 avec une vitesse orthoradiale $\vec{V}_0 = V_0\vec{e}_\theta$.

On donne l'accélération de la pesanteur g = 9,8 m.s^{-2}.



1. Effectuer le bilan des forces appliquées à M et les représenter sur un schéma clair lorsque la perle est dans une position M(t) quelconque. On précisera les composantes de ces forces sur la base polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$.

2. En déduire l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction $\ddot{\theta}(t)$.

On suppose que la norme V_0 du vecteur vitesse initial est suffisamment faible pour que la valeur absolue de l'angle θ reste faible à chaque instant.

3. Déterminer l'expression de θ(t) dans cette hypothèse en fonction de V_0, g, R et t.

4. Quelle est la période des oscillations ? Faire l'A.N.

5. Quelle est la valeur maximale de V_0 pour que θ reste inférieur à 25° au cours des oscillations ?

On suppose à partir de maintenant que le point M subit au cours de son mouvement une force de frottement fluide $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$ où λ est une constante positive. L'angle θ(t) reste toujours faible à chaque instant.

6. Établir la nouvelle équation différentielle satisfaite par la fonction θ.

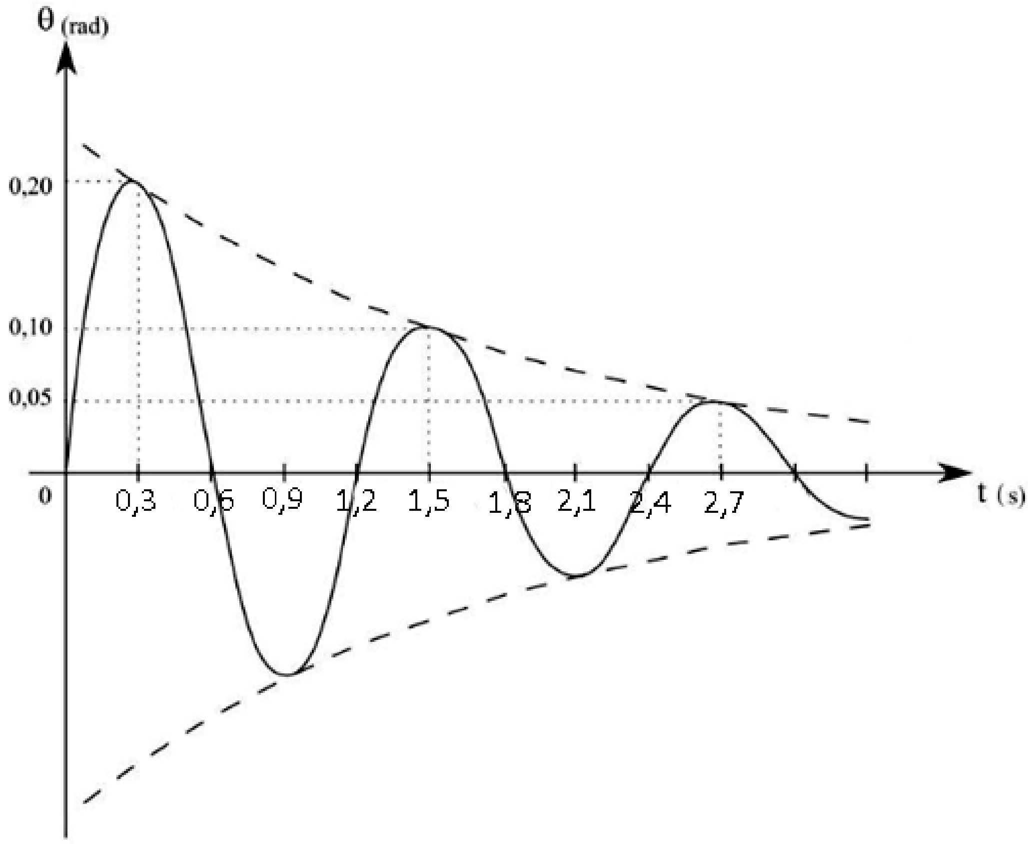
7. Les grandeurs m, g et R étant fixées, donner la condition sur λ pour que le mouvement soit pseudo-périodique. Faire l'A.N. [avec la bonne unité].

8. On suppose que la condition précédente est réalisée. Exprimer θ(t) sous la forme :

$$\theta(t) = A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\sin(\Omega t)$$

On justifiera soigneusement l'établissement de cette relation et on exprimera A, τ et Ω en fonction de V_0, m, g, R et λ.

9. L'allure de la courbe représentative des variations de la fonction θ(t) est donnée ci-dessous.



On appelle décrément logarithmique la grandeur sans dimension :

$$\delta = \ln\left(\frac{\theta(t)}{\theta(t+T)}\right)$$

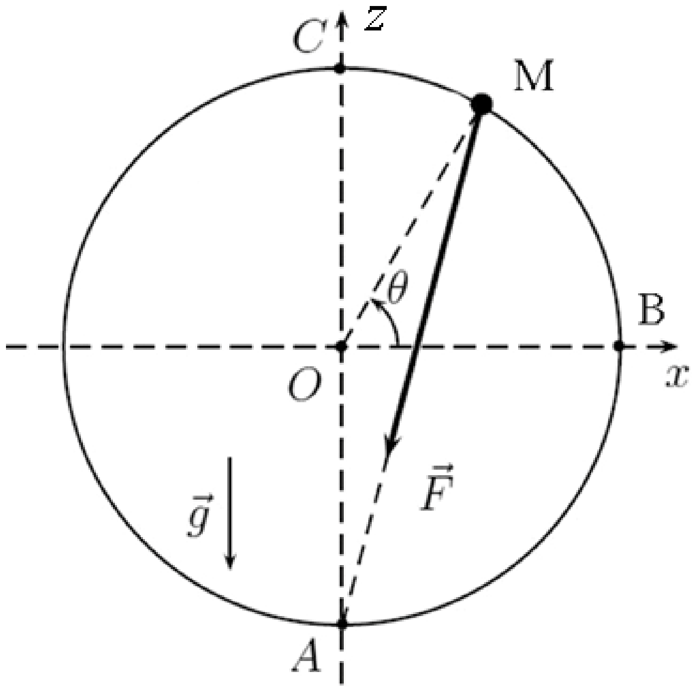
où T désigne la pseudo-période (T = 2π/Ω).

Exprimer δ en fonction de λ, m et T, puis, par lecture graphique, déterminer les valeurs de T et δ. En déduire celle de λ sachant que m = 50g.

Le rail est maintenant un cercle complet (toujours de rayon R = 50 cm) contenu dans un plan vertical.

La perle M (masse m = 50 g) coulisse de nouveau sans frottement sur le rail.

En plus de son poids, elle est soumise de la part du point le plus bas A du cercle à une force de rappel élastique $\vec{F}$ de longueur à vide nulle ($\ell_0 = 0$) et de constante de raideur k.



10. Montrer que la longueur AM vaut : $AM = 2\,R\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$.

11. Donner l'expression de l'énergie potentielle totale du point M.

On constate que si la vitesse au point B est V_B = 4,0 m.s^{-1} alors le point M a un mouvement d'oscillations dont l'amplitude est $\theta_m = \pi/3$ rad.

12. En déduire la valeur de k.

Pour la suite on prendra k = 0,90 N.m^{-1}.

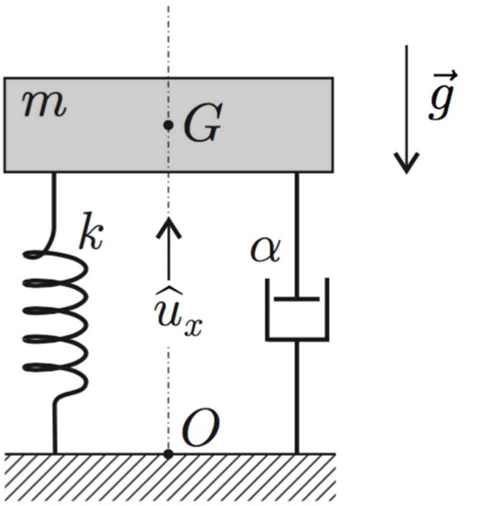
13. Quelle doit être la vitesse $V_{B,critique}$ de passage au point B pour que le mobile atteigne le point C et ait un mouvement de révolution ?

14. Déterminer les positions d'équilibre et leur stabilité.

15. Quelle est la période des petites oscillations autour de la position d'équilibre stable ?

II. Le Millennium Bridge

Pour marquer le millénaire, une nouvelle passerelle a été construite au-dessus de la TAMISE à LONDRES pour un coût total de plus de 20 millions de Livres Sterling. Quand elle fut ouverte aux piétons on remarqua très vite qu'elle se balançait latéralement et verticalement en cas de forte affluence. Avec un grand nombre de piétons, son mouvement oblique était tel que la plupart d'entre eux s'arrêtaient et s'accrochaient aux rampes. Des images et des vidéos ont montré que ces mouvements latéraux pouvaient avoir une amplitude moyenne de 75 mm et qu'ils se produisaient avec des fréquences de l'ordre du Hertz. Le pont fut donc fermé deux jours après son ouverture au public. Dix-huit mois de recherches furent nécessaires pour résoudre le problème et faire les modifications préconisées par les ingénieurs qui furent donc finalement consultés. L'objectif de ce problème est l'identification de l'origine des oscillations du MILLENNIUM BRIDGE de LONDRES et leur modélisation.



Le MILLENNIUM BRIDGE est modélisé par l'oscillateur présenté ci-dessus (à gauche). L'oscillateur est constitué d'une masse m dont le centre d'inertie G est repéré par sa position x dans le référentiel galiléen (O, $\vec{u}_x$) (voir figure). L'origine O se situe au niveau du sol. L'oscillateur est relié à un support fixe par l'intermédiaire d'un ressort linéaire de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 ainsi que d'un amortisseur linéaire de viscosité α, exerçant sur m une force de frottement :

$$\vec{F}_t = -\alpha \frac{dx}{dt}\,\vec{u}_x$$

avec $\alpha > 0$. À tout instant t, on assimile la distance OG à la longueur $\ell(t)$ du ressort.

A- Oscillations libres du Millennium Bridge

1. Déterminer la position du point G à l'équilibre, notée $x_{éq}$, en fonction de m, k, g et ℓ_0.

2. En appliquant la relation fondamentale de la dynamique, établir l'équation différentielle :

$$\frac{d^2X}{dt^2} + 2\zeta\omega_0\frac{dX}{dt} + \omega_0^2\, X = 0$$

dans laquelle on a introduit la fonction X(t) = x(t) – $x_{éq}$. Préciser les expressions et significations des coefficients ω_0 et ζ.

3. Quelle est la relation entre ζ et le facteur de qualité Q de cet oscillateur.

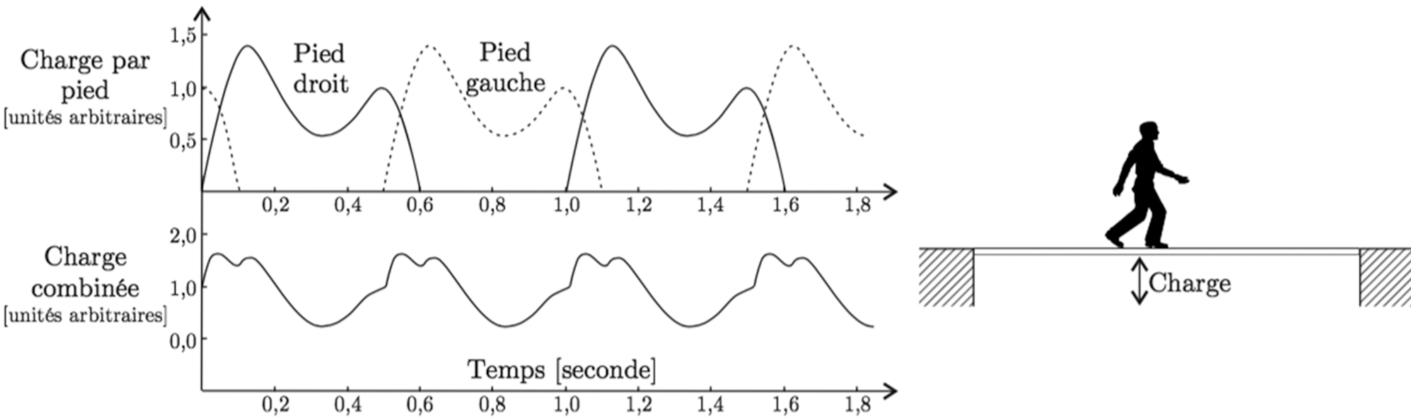
4. Dans certains cas, le vent peut induire sur le pont une force supplémentaire, proportionnelle au vecteur vitesse et que l'on peut mettre sous la forme : $\vec{F}_V = \beta \frac{dx}{dt} \vec{u}_x$

avec $\beta > 0$. Quelle peut être la conséquence de cette composante supplémentaire ?

B- Oscillations forcées du Millennium Bridge

Différents cas peuvent être examinés pour l'excitation (ou forçage) F(t) de l'oscillateur précédent. Dans la suite, nous nous placerons dans l'optique d'une passerelle piétonne en l'absence de vent.

L'action de la marche d'un piéton est caractérisée par un contact continu sur la surface du sol puisque le second pied touche le sol avant que le premier ne le quitte. La force engendrée comprend une composante verticale et une composante horizontale non prise en compte dans cette partie.



Dans le cadre d'un modèle simplifié, nous représenterons cette force verticale, appelée charge, par un vecteur périodique :

$$\vec{F} = \vec{F}_0 + \vec{F}_1 \cos(2\pi f t)$$

Le vecteur $\vec{F}_0$ correspond à la force statique, c'est-à-dire au poids du piéton, et la fréquence f correspond à celle d'une marche normale. Nous considérerons que $\vec{F}_1 = 0{,}4 \times \vec{F}_0$.

Ces deux vecteurs seront supposés constants et orientés comme $-\vec{u}_x$.

On note $F_0 = \|\vec{F}_0\|$ la norme de la force statique et $X' = X + F_0/(m\omega_0^2)$ la réponse en déplacement de l'oscillateur.

5. Établir l'équation différentielle vérifiée par X'(t) et montrer que :

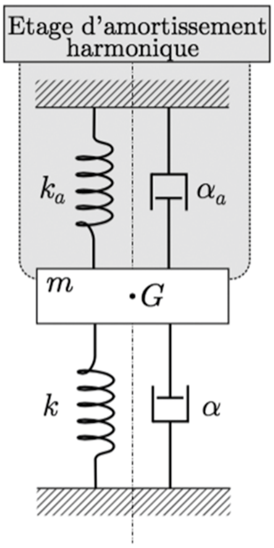
$$\frac{d^2X'}{dt^2} + 2\,\zeta\,\omega_0\,\frac{dX'}{dt} + \omega_0^2\,X' = -\frac{F_1}{m}\cos(2\pi f t)$$

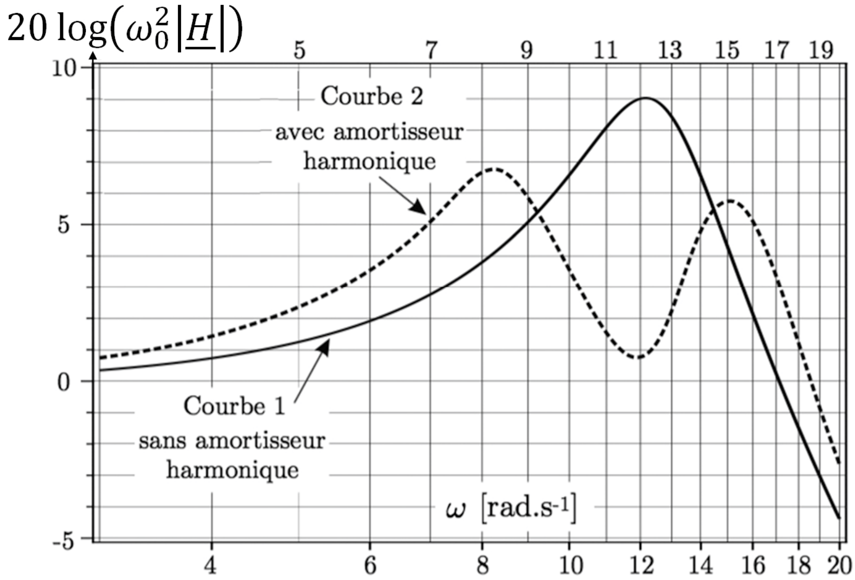
On pose alors $\underline{X}' = \underline{X}'_m \times \exp(j\omega t)$ la représentation complexe de X'(t) en régime établi sinusoïdal.

6. Déterminer la fonction de transfert $\underline{H}(\omega)$, rapport de la représentation complexe de la réponse en déplacement $\underline{X}'$ sur la représentation complexe de l'excitation $\underline{E} = \frac{1}{m} \times \underline{F}_1 = \frac{1}{m} F_1 \exp(j\omega t)$. On exprimera $\underline{H} = \underline{X}'/\underline{E}$ en fonction de ζ, ω_0 et ω. De quel type de filtre s'agit-il ?

7. Sous quelle condition portant sur ζ, un phénomène de résonance peut-il se produire ? Pour quelle pulsation ω_r obtient-on alors ce phénomène ? Exprimer le gain en amplitude à la résonance $|\underline{H}|(\omega_r)$ dans la limite $\zeta^2 \ll 1$.

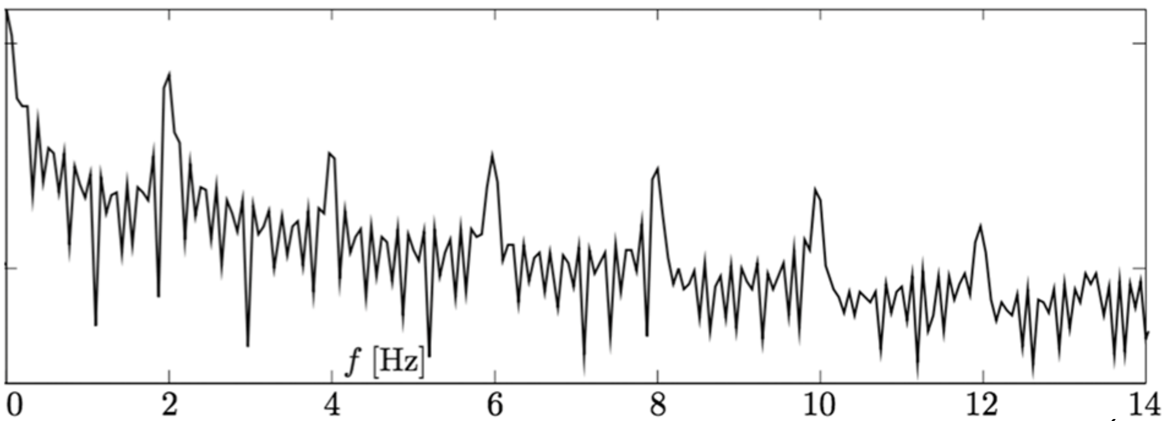
8. En se plaçant dans l'hypothèse $\zeta^2 \ll 1$ et à partir d'une analyse de la courbe 1 de la figure suivante, déterminer un ordre de grandeur de ζ ainsi que la valeur de la pulsation propre ω_0 de l'oscillateur modélisant le MILLENNIUM BRIDGE avant la mise en place des amortisseurs harmoniques [Attention : l'ordonnée est $20 \log(\omega_0^2|\underline{H}|)$ en dB].





9. Pourquoi est-il important de déterminer les fréquences de résonance d'une structure soumise à une action périodique ?

Afin d'étudier précisément les propriétés du forçage que constitue la marche d'un piéton, on réalise l'acquisition en laboratoire du signal correspondant à cette sollicitation puis on calcule le spectre de ce signal. Le spectre obtenu est présenté sur la figure ci-dessous :



10. Déduire de ce spectre la (ou les) fréquence(s) caractéristique(s) de la marche étudiée. Était-ce qualitativement prévisible ?

11. Partir d'une exploitation des données fournies dans le sujet, expliquer l'origine du problème concernant le MILLENNIUM BRIDGE et justifier que l'installation d'amortisseurs harmoniques ait pu le résoudre.

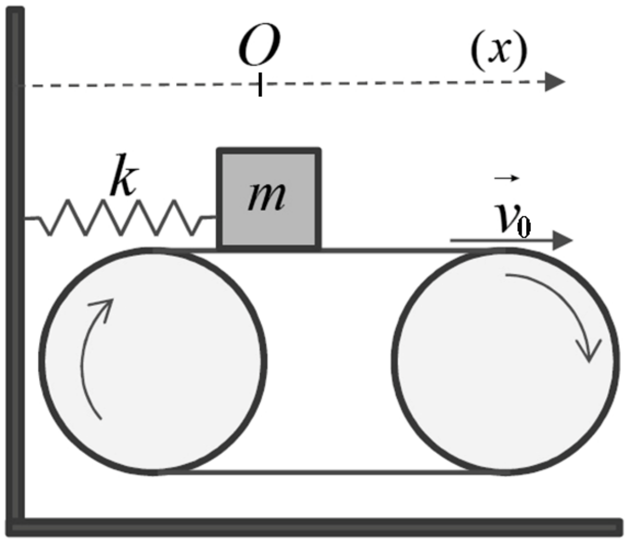
III. Oscillateur de relaxation (d'après G2E 2021) **:**

Les oscillateurs de relaxation sont des systèmes qui oscillent indéfiniment et périodiquement entre deux états d'énergie différente. Leur évolution n'est pas sinusoïdale et nécessite une source extérieure d'énergie.

Le problème étudie différents exemples d'oscillateurs de relaxation mais l'extrait choisi ne présente qu'un système mécanique : l'oscillateur « stick-slip » qui sert à modéliser le coulissement des plaques lithosphériques.

L'intensité de la pesanteur vaut g = 9,8 m.s^{-2}.

On modélise en première approximation le coulissement entre deux plaques lithosphériques par le dispositif suivant : un objet considéré comme ponctuel, de masse m, est posé sur un tapis roulant entraîné à une vitesse $\vec{v}_0$ constante par rapport au sol immobile.



Cet objet est également relié à un point fixe par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. La position du centre de l'objet est repérée par son abscisse x (axe horizontal).

On modélise le frottement entre le tapis et l'objet par le modèle de Coulomb du frottement solide de coefficient de frottement λ.

1. Enoncer la loi de coulomb pour le frottement solide.

A l'instant t = 0, la longueur du ressort est égale à sa longueur à vide ℓ_0 et l'abscisse de la masse est alors choisie comme origine de l'axe Ox (x(t=0) = 0). La vitesse de l'objet est alors égale à celle du tapis et il est immobile par rapport au tapis.

2. Exprimer alors la loi horaire x(t) durant cette phase. En déduire l'expression de $\vec{R}_T$ en fonction du temps et déterminer l'instant t_1 à partir duquel l'immobilité par rapport au tapis n'est plus possible. Exprimer t_1 en fonction de λ, m, g, k et v_0.

Lorsque l'instant t_1 est atteint, une deuxième phase commence au cours de laquelle l'objet glisse sur le tapis.

3. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par x(t) dans cette deuxième phase.

4. Résoudre cette équation en précisant bien les conditions initiales de cette deuxième phase.

A l'instant t_2, la vitesse de l'objet **par rapport au tapis** s'annule à nouveau.

5. Exprimer t_2 en fonction de t_1, k et m.

6. Déterminer la position de l'objet à l'instant t_2. Peut-il rester immobile par rapport au tapis ?
Si la réponse est affirmative, étudier la troisième phase.
Si la réponse est négative, expliquer ce qu'il se passe.

7. L'aspect énergétique de l'évolution précédente peut sembler paradoxal puisque les oscillations ont une amplitude constante alors qu'il y a des frottements solides.
Proposer une explication.