PCSI 1 - 21-22

DS n° 6.

I Sismomètre à longue période.

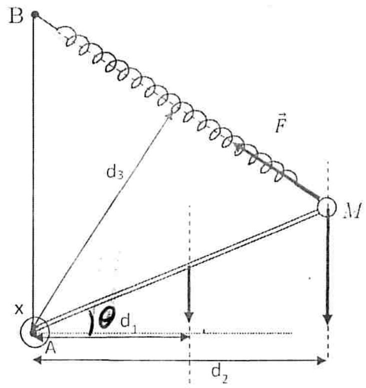
1. Système {tige + M}   Réf: terrestre considéré galiléen

$$J_{Ax} = J_{tige} + J_{Ax}(M) = \boxed{\frac{1}{3} m_0 \ell^2 + m\ell^2 = J_{Ax}}$$

car $J_{Ax} = \sum_i (m_i r_i^2)$ et que pour M, $r = \ell$.

2. Forces: $m_0\vec{g}$; $m\vec{g}$; $\vec{F}_{ressort} = -k\,BM\,\vec{u}$; $\vec{R}_{axe}$

Moments /Ax :



$$\boxed{\mathcal{M}_{Ax}(m_0\vec{g}) = -m_0 g \frac{\ell}{2}\cos\theta}$$
$$\boxed{\mathcal{M}_{Ax}(m\vec{g}) = -mg\,\ell\cos\theta}$$

signe ⊖ car $m_i\vec{g}$ entraînent le syst vers θ décroissant.

$$\boxed{\mathcal{M}_{Ax}(\vec{F}) = k\,BM\,d_3}$$ avec $d_3 = \ell\cos(\beta/2) = \ell\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$

$$\boxed{\mathcal{M}_{Ax}(\vec{R}_{axe}) = 0}$$ car la liaison est idéale ($\vec{R}_{axe}$ coupe Ax).

R: on peut simplifier $\mathcal{M}_{Ax}(\vec{F}) = k\,2\ell\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\ell\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$

en $\mathcal{M}_{Ax} = k\ell^2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \boxed{k\ell^2\cos\theta = \mathcal{M}_{Ax}}$

3. A l'équilibre du solide: $\sum\vec{F} = \vec{0}$ et $\forall\Delta$, $\sum\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = 0$

Ici la 2e condition, en prenant $\Delta = Ax$ donne :

$$-m_0 g\frac{\ell}{2}\cos\theta - mg\ell\cos\theta + k\ell^2\cos\theta = 0$$

en $\theta = 0$ on obtient: $-m_0 g\frac{\ell}{2} - mg\ell + k\ell^2 = 0$

Il faut donc que $\boxed{k = (m + m_0/2)\,g/\ell}$ pour que $\theta = 0$ soit une position d'équilibre.

R: avec une telle condition, $\forall\theta$, $\sum\mathcal{M}_{Ax}(\vec{F}) = 0$

c'est alors une position d'équilibre indifférente. (n'importe quelle valeur de θ convient!)

4. $\mathcal{E}_{pp1} = m_0 g \frac{l}{2} \sin\theta$; $\mathcal{E}_{pp2} = mgl\sin\theta$] axe en $\theta = 0$!

$\mathcal{E}_{pp,e} = \frac{1}{2} k BM^2$ d'où $\mathcal{E}_{p1} = (m_0/2 + m) gl \sin\theta + \frac{1}{2} k l^2 4 \sin^2(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2})$

or $\sin^2(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}) = \frac{1}{2}(1 - \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin\theta$.

Finalement : $\mathcal{E}_{p1} = \left[(\frac{m_0}{2} + m) lg - kl^2 \right] \sin\theta + kl^2$

$\boxed{C_1 = kl^2}$; $\boxed{C_2 = -kl^2 + (\frac{m_0}{2} + m) g l}$

5. Position d'équilibre si $\frac{d\mathcal{E}_{p1}}{d\theta}(\theta = 0) = 0$

or $\frac{d\mathcal{E}_{p1}}{d\theta} = C_2 \cos\theta$ donc $\frac{d\mathcal{E}_{p1}}{d\theta}(\theta = 0) = C_2$.

Il faut donc que $C_2 = 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{kl = (\frac{m_0}{2} + m) g}$

C'est bien la même condition.

6. Le seul chg^t est pour $BM^2 = 4l^2 \sin^2(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} - \frac{\theta}{2}) = 2l^2(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin(\theta + \alpha))$

$\mathcal{E}_{p2} = (\frac{m_0}{2} + m) g l \sin\theta - kl^2 \sin(\theta + \alpha) + \underbrace{kl^2}_{C_1}$

d'où $\boxed{C_3 = (\frac{m_0}{2} + m) g \cdot l \text{ et } C_4 = -kl^2}$

7. $\frac{d\mathcal{E}_p}{d\theta} = C_3 \cos\theta + C_4 \cos(\alpha + \theta)$

Pour que $\frac{d\mathcal{E}_p}{d\theta}(\theta = 0) = 0$ il faut $C_3 + C_4 \cos\alpha = 0$

D'où $\boxed{\cos\alpha = -\frac{C_3}{C_4} = \frac{(m_0/2 + m)}{kl} g}$: $\alpha = \arccos\left(\frac{m_0/2 + m}{kl} g\right)$ > 0.

8. $\mathcal{E}_{p2} = C_1 - C_4 \cos\alpha \sin\theta + C_4 \sin(\alpha + \theta)$

$= C_1 - \cancel{C_4 \cos\alpha \sin\theta} + C_4 (\sin\alpha \cos\theta + \cancel{\cos\alpha \cdot \sin\theta})$

$= C_1 + C_4 \sin\alpha \cos\theta$. Or $C_4 = -C_1$ d'où l'expression simplifiée de $\mathcal{E}_{p2}$.

9. $\frac{d^2\mathcal{E}_p}{d\theta^2}(\theta = 0) = C_1 \sin\alpha \cos(\theta = 0)$

$= C_1 \sin\alpha = kl^2 \sin\alpha > 0$ car $\alpha \in [0 ; \frac{\pi}{2}]$

La position d'équilibre est donc stable (minimum de $\mathcal{E}_p$).

10. Le système évolue à énergie mécanique constante car :

TEM : $\Delta \mathcal{E}_m = W(\vec{F}_{nc}) = W(\vec{R}_{axe}) = 0$ car liaison pivot idéale.

Donc $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} J_{Az} \dot{\theta}^2 + \mathcal{E}_{p2}$

Pour $\theta \ll 1$ rad : $\mathcal{E}_{p2}(\theta) \simeq \mathcal{E}_{p2}(\theta = 0) + \frac{d^2 \mathcal{E}_{p2}}{d\theta^2}(\theta = 0) \cdot \frac{\theta^2}{2} + o(\theta^2)$

D'où, à l'ordre 1 en θ : $\mathcal{E}_m \simeq \frac{1}{2} J_{Az} \dot{\theta}^2 + C_1(1 - \sin\alpha) + C_1 \sin\alpha \frac{\theta^2}{2}$.

Comme $\mathcal{E}_m = cte$: $\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0 \Rightarrow J_{Az} \dot{\theta}\ddot{\theta} + C_1 \sin\alpha \, \theta\dot{\theta} = 0$

D'où, après simplification par $\dot{\theta}$ qui s'annule en des points discrets : $\ddot{\theta} + \frac{k\ell^2 \sin\alpha}{J_{Az}} \theta = 0$ $\quad C_1 = k\ell^2$

Donc $\boxed{\omega_0^2 = \frac{k\ell^2 \sin\alpha}{J_{Az}} = \frac{k\ell^2 \sin\alpha}{m\ell^2 + \frac{1}{3} m_0 \ell^2}}$

11. $m \gg m_0$ donc $\boxed{\omega_0^2 \simeq k \frac{\sin\alpha}{m}}$.

12. $\boxed{\cos\alpha \simeq \frac{mg}{k\ell}}$

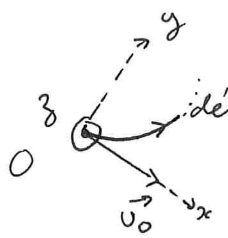
13 $\alpha \ll 1$ rad donc à l'ordre 1 : $\cos\alpha = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{k}{m} = \frac{g}{\ell} = 16{,}3 \ \mathrm{N.m^{-1}.kg^{-1}}}$

14. $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k \sin\alpha}} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{4\pi^2}{T_0^2} \cdot \frac{m}{k} = 0{,}024$.

On en déduit $\boxed{\alpha = \arcsin\left(\frac{4\pi^2}{T_0^2} \frac{m}{k}\right) = 0{,}024 \text{ rad} = 1{,}4°}$.

II Détection de particules

1. Syst : e^- Réf : t.c.g Forces : $m\vec{g}$ (négligé) $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$



début de la trajectoire de l'électron.

- on sait que l'accélération de l'e^- est orientée vers l'intérieur de la concavité de la trajectoire.
- De plus le PFD indique $\vec{F} = m\vec{a}$ donc $\vec{F}$ est également orientée vers l'int. de la concavité.
- Enfin $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ donc $(\vec{F}, q\vec{v}, \vec{B})$ forment un trièdre direct.

Au début de la trajectoire : $\vec{F}$ est selon $\vec{e_y}$ et $\vec{v}$ selon $\vec{e_x}$

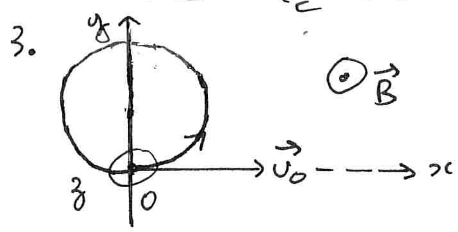
D'où $q\vec{v} = -e\vec{v}$ est selon $-\vec{e_x}$ et $\vec{B}$ selon $\vec{e_y} \wedge -\vec{e_x} = +\vec{e_z}$

Donc $\boxed{\vec{B} \text{ est sortant de la feuille : } \odot \vec{B}}$

2. Appliquons le TEC : $\dfrac{d\mathcal{E}}{dt} = P(\vec{F}) = (q\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0$

Donc $\mathcal{E}_c = cte = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow \boxed{\|\vec{v}\| = cte = v_0}$

3.



PFD : $m\vec{a} = -e\vec{v} \wedge \vec{B} = -e \begin{vmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{vmatrix} = -e \begin{vmatrix} \dot{y}B \\ -\dot{x}B \\ 0 \end{vmatrix}$

D'où $\boxed{\ddot{z} = 0} \Rightarrow \dot{z} = C_1$

Or $\boxed{\dot{z}(0) = 0}$ donc $C_1 = 0$

$\Rightarrow \forall t : \dot{z} = 0 \Rightarrow$ $\boxed{\text{la trajectoire est plane}}$ (plan d'équation $z = z_0$).

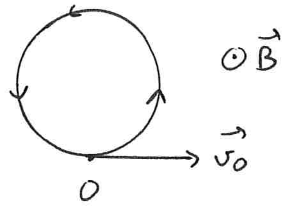
4. PFD avec Frenet : $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{v} \wedge \vec{B} = -e v_0 \vec{T} \wedge B\vec{e_z} = |-e v_0 B| \vec{N} = e v_0 B \vec{N}$

car l'acc selon $\vec{N}$ est positive.

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} m\dfrac{dv}{dt} \\ m\dfrac{v^2}{R} \end{vmatrix}_{(\vec{T}, \vec{N})} = \begin{vmatrix} 0 \\ evB \end{vmatrix}$$

D'où $\quad m\dfrac{v_0^2}{R} = e v_0 B \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = \dfrac{m v_0}{eB} = C^{te}}$

Le rayon de courbure est constant ⇒ la traj. est un cercle.



5. $\boxed{\begin{array}{l} T = \dfrac{2\pi R}{v_0} = \dfrac{2\pi m}{eB} \\ \omega_c = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{eB}{m} \end{array}}$

6. On ajoute la force $\vec{f} = -\alpha \vec{v} = -\alpha \begin{vmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{vmatrix}$ et on obtient :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -e\dot{y}B - \alpha\dot{x} \\ m\ddot{y} = e\dot{x}B - \alpha\dot{y} \end{cases} \xrightarrow[\omega_c = \frac{eB}{m}]{} \begin{cases} \ddot{x} = -\omega_c \dot{y} - \dfrac{\dot{x}}{\tau} & (1) \\ \ddot{y} = \omega_c \dot{x} - \dot{y}/\tau & (2) \end{cases}$$

avec $\boxed{\tau = \dfrac{\alpha}{m}}$

7. $\underline{v} = \dot{x} + i\dot{y}$ et $\underline{\dot{v}} = \ddot{x} + i\ddot{y}$

(1) + i×(2) donne : $\ddot{x} + i\ddot{y} = \omega_c \underbrace{(\dot{x}i - \dot{y})}_{i(\dot{x}+i\dot{y})} - (\dot{x} + \dot{y}i)/\tau$

D'où $\boxed{\underline{\dot{v}} = \left(-\dfrac{1}{\tau} + i\omega_c\right)\underline{v}}$

Solution : $\underline{v} = \underline{C}\, e^{-\frac{t}{\tau}} e^{i\omega_c t}$ avec $\underline{v}(0) = v_0 = \underline{C}$

D'où $\boxed{\underline{v} = v_0 e^{-t/\tau} e^{i\omega_c t}}$

8. $\begin{cases} \dot{x} = Re(\underline{v}) = v_0 e^{-t/\tau} \cos\omega_c t \\ \dot{y} = Im(\underline{v}) = v_0 e^{-t/\tau} \sin\omega_c t \end{cases} \Rightarrow \|\vec{v}\| = v_0 e^{-t/\tau}$

- la vitesse diminue exponentiellement avec un temps caractéristique $\tau = \dfrac{\alpha}{m}$.
- le vecteur vitesse est un vecteur tournant à la vitesse de rotation (ou pulsation) $\omega_c = \dfrac{eB}{m}$.

9. On introduit $\underline{X} = x + i\, y$: $\dot{\underline{X}} = \underline{V} = v_0\, e^{\left(-\frac{1}{\tau}+i\omega_c\right)t}$

Donc $\underline{X} = \dfrac{v_0}{-\frac{1}{\tau}+i\omega_c}\, e^{-\frac{t}{\tau}}\, e^{+i\omega_c t} + \underline{C}$

On la CI est $\underline{X}(0) = 0 = \dfrac{v_0}{-\frac{1}{\tau}+i\omega_c} + \underline{C} \Rightarrow \underline{C} = \dfrac{v_0}{\frac{1}{\tau}-i\omega_c}$

D'où $\underline{X} = \dfrac{v_0}{-\frac{1}{\tau}+i\omega_c}\left(e^{-t/\tau} e^{i\omega_c t} - 1\right) = v_0\tau\, \dfrac{-1-i\omega_c\tau}{1+\omega_c^2\tau^2}\left(e^{-\frac{t}{\tau}} e^{i\omega_c t} - 1\right)$

On obtient x avec $x = Re(\underline{X})$ et y avec $y = Im(\underline{X})$

$$\Rightarrow \quad x(t) = v_0\tau\left[\frac{-1}{1+\omega_c^2\tau^2}\left(e^{-t/\tau}\cos\omega_0 t - 1\right) + \frac{\omega_c\tau}{1+\omega_c^2\tau^2}\left(e^{-t/\tau}\sin\omega_0 t\right)\right]$$

$$= v_0\tau\left(\frac{\sqrt{1+\omega_c^2\tau^2}}{1+\omega_c^2\tau^2}\, e^{-t/\tau}\cos(\omega_0 t+\varphi) + \frac{1}{1+\omega_c^2\tau^2}\right)$$

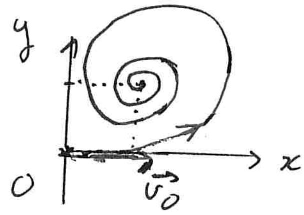
avec $\tan\varphi = +\omega_c\tau$

$$\Rightarrow \quad x_0 = \frac{v_0\tau}{1+\omega_c^2\tau^2} \quad ; \quad R_0 = \frac{v_0\tau}{\sqrt{1+\omega_c^2\tau^2}} \quad ; \quad y_0 = \frac{v_0\tau^2\omega_c}{1+\omega_c^2\tau^2}$$

10. On peut écrire : $\left(\dfrac{x-x_0}{R_0 e^{-t/\tau}}\right)^2 + \left(\dfrac{y-y_0}{R_0 e^{-t/\tau}}\right)^2 = 1$

C'est l'équation d'un cercle de centre $C \left| \begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix} \right.$ et de rayon $R_0 e^{-t/\tau}$: le rayon diminue exponentiell^t.

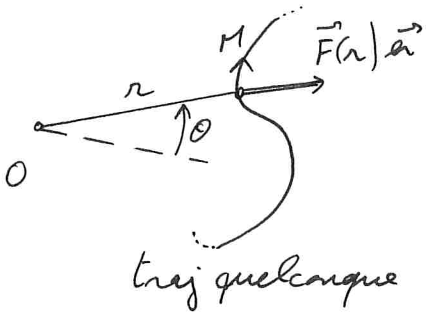
$\Rightarrow$ C'est une spirale :



conforme à la photographie !

III Proxima : mission vers Mars.

A.1.



Syst : M de masse m

Ref : ? considéré galiléen

Force : $\vec{F} = F(r)\,\vec{e_r}$

Appliquons le TMC en O fixe : $\dfrac{d\vec{L_o}}{dt} = \vec{\mathcal{M}_o}(\vec{F})$

$= \vec{OM} \wedge F(r)\vec{e_r} = \vec{0}$

Donc $\vec{L_o} = \vec{Cte}$

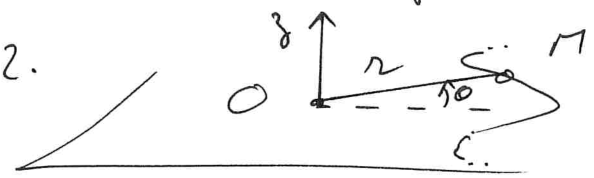
Le moment cinétique /O est une intégrale première du mouvement.

Or $\vec{L_o} = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$ donc $\forall t : \vec{OM} \perp \vec{L_o}$.

Donc $\vec{OM}$ est dans le plan $\perp$ à $\vec{L_o}$ passant par O.

$\Rightarrow$ la trajectoire est plane.

2.



$\vec{L} = r\vec{e_r} \wedge (m\dot{r}\vec{e_r} - m r\dot{\theta}\vec{e_\theta})$

$= m r^2 \dot{\theta}\,\vec{e_z}$ (car $z = 0$).

$\vec{L_o} = \vec{Cte}$ donc $\boxed{r^2\dot{\theta} = Cte = C}$

3. TEM : $\Delta \mathcal{E}_m = W(\vec{F}_{nc})$ or il n'y a pas de force non conservative ($\vec{F}$ a une $\mathcal{E}_{pot}$ associée).

Donc $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv^2 + \mathcal{E}_{pot} = Cte$ = intégrale première.

De plus $\mathcal{E}_m = \underbrace{\frac{1}{2}m\dot{r}^2}_{\mathcal{E}_c \text{ radiale}} + \underbrace{\frac{1}{2}m(r\dot{\theta})^2}_{\mathcal{E}_c \text{ orthoradiale}} + \mathcal{E}_{pot}$

$= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \dfrac{mC^2}{2r^2} + \mathcal{E}_{pot}$

$= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \mathcal{E}_{peff}$ avec $\boxed{\mathcal{E}_{peff} = \dfrac{mC^2}{2r^2} + \mathcal{E}_{pot}}$

4. Syst : M Ref : géocentrique considéré galiléen ⚠

Force : $\vec{F} = -\frac{\mathcal{G} M_T m}{r^2}\vec{e_r}$ (avec $E_{pot} = -\frac{\mathcal{G} M m}{r}$).

PFD : $m\vec{a} = \vec{F}$. $\Rightarrow$ selon $\vec{e_r}$: $-mr\dot{\theta}^2 = -\frac{\mathcal{G} M_T m}{r^2}$

D'où $v = r\dot{\theta} = \sqrt{\frac{\mathcal{G} M_T}{r}}$: $\boxed{v_1 = \sqrt{\frac{\mathcal{G} M_T}{r_1}} = 7{,}72\ \text{km.s}^{-1}}$

R : ⚠ $\mathcal{G}$ n'est pas donnée mais $g = \frac{\mathcal{G} M_T}{R_T^2}$ donc $\mathcal{G} M_T = g R_T^2$
$= 4.10^{14}$ SI

5. $T_1 = \frac{2\pi r_1}{v_1} = \frac{2\pi r_1^{3/2}}{\sqrt{\mathcal{G} M_T}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{3^e \text{ loi de Kepler : } \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G} M_0}}$

$\boxed{T_1 = 5400\ s = 1^h 30'}$

6. Si le vaisseau quitte l'attraction terrestre c'est qu'il est sur une trajectoire libre avec $E_m \geq 0$.
La trajectoire libre d'énergie minimale correspond à $E_m = 0$ et est une parabole. Il faut donc que :

$\frac{1}{2} m v_2^2 - \mathcal{G}\frac{M_T m}{r_1} = 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{v_2 = \sqrt{\frac{2\mathcal{G} M_T}{r_1}} = \sqrt{2}\, v_1 \quad v_2 = 10{,}9\ \text{km s}^{-1}}$

7. On veut que :

$\frac{\mathcal{G} M_S}{r_{TS}^2} m = 10 \times \frac{\mathcal{G} M_T m}{d^2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{d = r_{TS}\sqrt{10\, M_T/M_S} = 0{,}0055\, r_{TS} = 820.10^3\ \text{km} \ll r_{TS}}$.

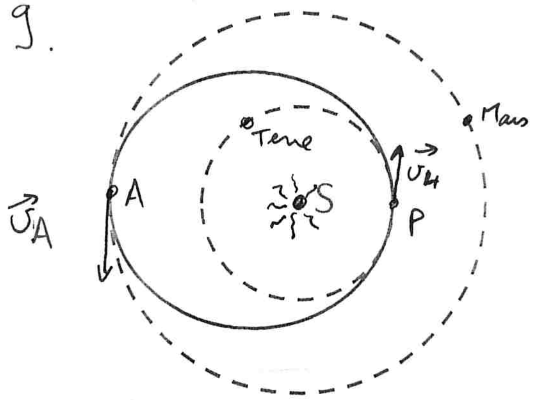
Le vaisseau se trouve à 800.000 km de la Terre mais cette distance est très faible par rapport à la distance Terre/Soleil. On peut donc légitimement considérer que le vaisseau est encore à la distance Terre Soleil du Soleil (donc sur l'orbite de la Terre autour du Soleil).

8. Même formule qu'à la question 4 :

$$\boxed{v_3 = \sqrt{\frac{GM_S}{d_{TS}}} = 29,8 \text{ km s}^{-1}}$$

$$\left[GM_S = GM_T \times \frac{M_S}{M_T} \simeq 1,3.10^{20} \text{ SI} \right]$$

9.



$\vec{v}_4$ et $\vec{v}_5$ sont orthoradiales : ces 2 points sont donc le périhélie et l'aphélie

$$2a = r_P + r_A = r_{TS} + r_{SMa}$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{r_{ST} + r_{SMa}}{2} = 189.10^6 \text{ km.}}$$

10. En P on peut écrire : $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m v_4^2 - \frac{GM_S m}{r_{TS}} = -\frac{GM_S m}{2a}$

Donc :
$$\boxed{\begin{array}{l} v_4^2 = GM_S\left(\frac{2}{r_{TS}} - \frac{1}{a}\right) \\ v_4 = 32,3 \text{ km s}^{-1} \end{array}}$$

11. La durée de trajet correspond à une demi période :

$\Delta t = \frac{T}{2}$ avec $T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_S} a^3$

$$\boxed{\begin{array}{l} \Delta t = \frac{1}{2} \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{GM_S}} \\ = 22,6.10^6 \text{ s} \\ = 262 \text{ jours.} \end{array}}$$

12. v_5 = vitesse de Mars autour du Soleil

$$= \sqrt{\frac{GM_S}{r_{SMa}}} = 23,9 \text{ km.s}^{-1}$$

Or en A : $v_A = v_P \times \frac{r_P}{r_A} = v_4 \times \frac{r_{ST}}{r_{SMa}} = 21,2 \text{ km s}^{-1}$.

Donc le TEM indique que $W(\text{mot}) = \Delta\mathcal{E}_m = \Delta\mathcal{E}_c$

$$\boxed{W(\text{mot}) = \frac{1}{2} m \left(v_5^2 - v_A^2\right) = 6,0.10^{13} \text{ J}}$$

13. Notons t_0 l'instant de lancement : pour que le vaisseau arrive sur l'orbite de Mars au même endroit que Mars il faut que :

$$\theta_{Mars}(t_0+\Delta t) = \theta_{Terre}(t_0)+\pi .$$ puisque le vaisseau parcourt une demi ellipse (angle π)

Or $\theta_{Mars}(t_0+\Delta t) = \theta_{Mars}(t_0) + \omega_{Mars} \times \Delta t$

D'où $\underbrace{\theta_{Mars}(t_0) - \theta_{Terre}(t_0)}_{\alpha.} = \pi - \omega_{Mars} \cdot \Delta t$

$\boxed{\alpha = \pi - \omega_{Mars} \cdot \Delta t}$ AN : $\omega_{Mars} = \sqrt{\dfrac{gM_S}{r_{SM}^3}} = 1{,}05.10^{-7}\ \text{rad}\,s^{-1}$

D'où $\boxed{\alpha = 0{,}67\ \text{rad.} = 38°.}$

14. On a $\dfrac{d}{dt}(\theta_{Terre} - \theta_{Mars}) = \omega_{Terre} - \omega_{Mars}$

donc $\theta_{Terre} - \theta_{Mars}$ a une période qui vaut $\dfrac{2\pi}{\omega_T - \omega_{Mars}}$

$\Rightarrow$ Période des lancements $= \boxed{\dfrac{2\pi}{\omega_{Terre} - \omega_{Mars}} = 765\ j.}$

$\left(\omega_T = \dfrac{2\pi}{1\,an} = 2{,}0.10^{-7}\ \text{rad/s}\right)$

15. . L'ellipse entre la Terre et Venus : $a_1 = \dfrac{r_V + r_T}{2} = 129.10^6\ km \Rightarrow T_1 = 295\ j$

. Pour — — Vénus et Mars : $a_2 = \dfrac{r_M + r_V}{2} = 168.10^6\ km \Rightarrow T_2 = 439\ j$

D'où $\boxed{\Delta t = \dfrac{T_1}{2} + \dfrac{T_2}{2} = 367\ \text{jours}}$ (Trajet + long)

16. Ds le 1er scénario il faut ajouter W_{mot} lors du passage de v_3 à v_4 : $W_{①} = \frac{1}{2}m(v_4^2 - v_3^2) + \frac{1}{2}m(v_5^2 - v_A^2) = 1{,}4.10^{14}\ J.$

Ds le scénario 2 : $W_{②} = \underbrace{\frac{1}{2}m\left|v_A^2 - v_3^2\right|} + \frac{1}{2}m(v_p'^2 - v_p^2) + \frac{1}{2}m(v_5^2 - v_A'^2)$

⚠ $W_{mot} < 0$ mais un freinage consomme de l'énergie !

en T : passage de v_3 à v_A avec $v_A^2 = \mathcal{G}M_S\left(\frac{2}{r_{TS}} - \frac{1}{a_1}\right)$

en V : passage de v_P à v_P' avec $v_P = v_A \cdot \frac{r_{TS}}{r_{VS}}$

et $v_P'^2 = \mathcal{G}M_S\left(\frac{2}{r_{VS}} - \frac{1}{a_2}\right)$

en M : passage de v_A' à v_5 avec $v_A' = v_P' \, r_{SV}/r_{MS}$.

AN : $v_3 = 29{,}8 \text{ km s}^{-1}$ $v_A = 26{,}9 \text{ km s}^{-1}$ $v_P = 37{,}4 \text{ km s}^{-1}$

$v_P' = 40{,}4 \text{ km s}^{-1}$ $v_A' = 19{,}1 \text{ km s}^{-1}$ $v_5 = 23{,}9 \text{ km s}^{-1}$

$\Rightarrow \boxed{W_{2} = 3.10^{14} \text{ J.} > W_{1}}$.

Ce second scénario n'est pas intéressant (ni pour le tps de la mission ni pour la consommat° de carburant). Il faudrait utiliser la fronde gravitationnelle de Vénus mais c'est une autre histoire ....