

## Devoir surveillé n°6

### Physique

#### I. Sismomètre à longue période

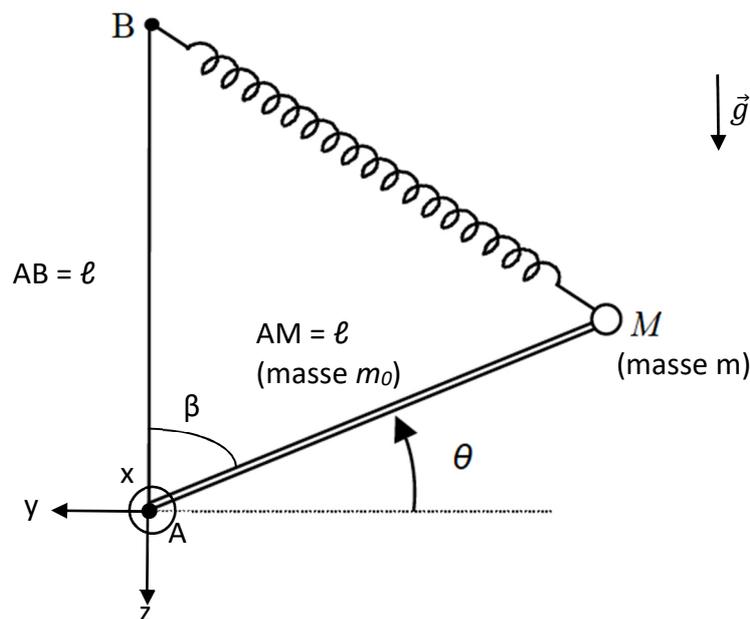
Lors d'un tremblement de Terre certaines vibrations du sol ont une période de l'ordre de la vingtaine de secondes.

Le sismomètre vu en TD composé d'une masse accrochée au bout d'un ressort, se comporte comme un filtre passe haut mais pour avoir une pulsation de coupure suffisamment basse pour enregistrer ces vibrations de longue période, il faut utiliser un ressort très souple et une masse très lourde.

L'allongement à l'équilibre est alors excessif.

Ce problème a été résolu par l'invention, il y a près d'un siècle, de sismomètres travaillant « en rotation », comme le sismomètre de LACOSTE, dont le principe est représenté sur la figure ci-dessous.

On le modélise ici par un point matériel  $M$  de masse  $m$ , situé à l'extrémité d'une tige de masse  $m_0$  et longueur  $\ell$ , pouvant tourner, par rapport au châssis, sans frottement autour de l'axe horizontal  $Ax$  (liaison pivot idéale).



Le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe  $(Ax)$  est :  $J_{tige} = \frac{1}{3} m_0 \ell^2$ .

Un ressort de constante de raideur  $k$ , de **longueur au repos supposée nulle**, est tendu **entre un point B du châssis**, situé au-dessus de A et le point M. Les mouvements du point M ont lieu dans le plan vertical, plan qui passe par les points A et B. On suppose enfin que les deux longueurs AM et AB sont constantes et ont la même valeur  $\ell$ .

L'inclinaison de la tige est repérée par l'angle  $\theta$  que fait la tige avec l'horizontale.

En l'absence de séisme, le point A est fixe dans le référentiel terrestre considéré galiléen.

Un peu de géométrie conduit à l'expression :

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \theta \quad \text{et} \quad L = BM = 2\ell \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$$

1. Déterminer le moment d'inertie  $J_{Ax}$  par rapport à l'axe Ax du système {tige AM + masse m}
2. Faire le bilan des forces extérieures s'exerçant sur le système {tige AM + masse m} et calculer le moment de ces forces par rapport à l'axe Ax.
3. En déduire la condition sur  $k$  faisant intervenir  $\ell$ ,  $m$ ,  $m_0$  et  $g$  afin que la position  $\theta = 0$  soit une position d'équilibre.
4. Exprimer l'énergie potentielle totale  $E_{p,1}$  du système et la mettre sous la forme suivante :

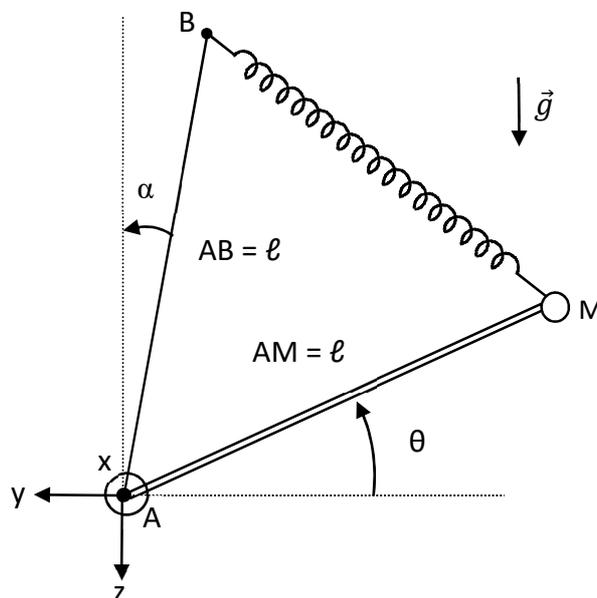
$$E_{p,1} = C_1 + C_2 \sin \theta$$

en exprimant les constantes  $C_1$  et  $C_2$  en fonction de  $m$ ,  $m_0$ ,  $k$ ,  $\ell$  et  $g$ . On choisira  $\theta = 0$  comme origine de l'énergie potentielle de pesanteur.

5. Retrouver l'expression de  $k$  en fonction de  $\ell$ ,  $m$ ,  $m_0$  et  $g$  afin que la position  $\theta = 0$  soit une position d'équilibre.

Lorsqu'on cherche expérimentalement à assurer la condition précédente, on constate en fait que le point M tend à se stabiliser en  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ .

Pour éviter ce problème, on incline légèrement vers la droite le support AB ; on note  $\alpha$  l'angle constant (très petit), positif, que fait l'axe AB avec la verticale. AB et AM sont dans le plan vertical de la figure représentée ci-dessous. On a toujours  $\ell = AM = AB$ .



On limite l'étude au domaine  $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} - \alpha\right]$ .

Un peu de géométrie conduit à l'expression :

$$L = BM = 2\ell \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} - \frac{\theta}{2}\right)$$

6. Déterminer la nouvelle expression de l'énergie potentielle totale  $E_{p,2}$  que l'on mettra sous a forme suivante :

$$E_{p,2} = C_1 + C_3 \sin \theta + C_4 \sin(\alpha + \theta)$$

et exprimer les constantes  $C_3$  et  $C_4$  en fonction des paramètres du système. On choisit toujours  $\theta = 0$  comme origine de l'énergie potentielle de pesanteur.

7. Quelle relation doit satisfaire  $\alpha$  en fonction de  $m$ ,  $m_0$ ,  $g$ ,  $\ell$  et  $k$  pour que la position  $\theta = 0$  représente une position d'équilibre ?

Dans la suite, on suppose que la valeur de  $m$  a été choisie de façon à ce que la relation précédente soit vérifiée.

8. Simplifier alors  $E_{p,2}$  pour arriver à l'expression suivante :

$$E_{p,2} = C_1(1 - \sin \alpha \cos \theta)$$

9. Etudier la stabilité de la position d'équilibre  $\theta = 0$ .

On étudie maintenant les petites oscillations au voisinage de  $\theta = 0$ .

10. Montrer, à l'aide d'une analyse énergétique, que  $\theta(t)$  obéit à l'équation différentielle :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2\theta = 0$$

et déterminer l'expression de la pulsation propre  $\omega_0$  en fonction de  $k$ ,  $m$ ,  $m_0$  et  $\alpha$ .

On suppose désormais que  $m \gg m_0$ .

11. Simplifier l'expression de  $\omega_0$  en tenant compte de l'approximation précédente.

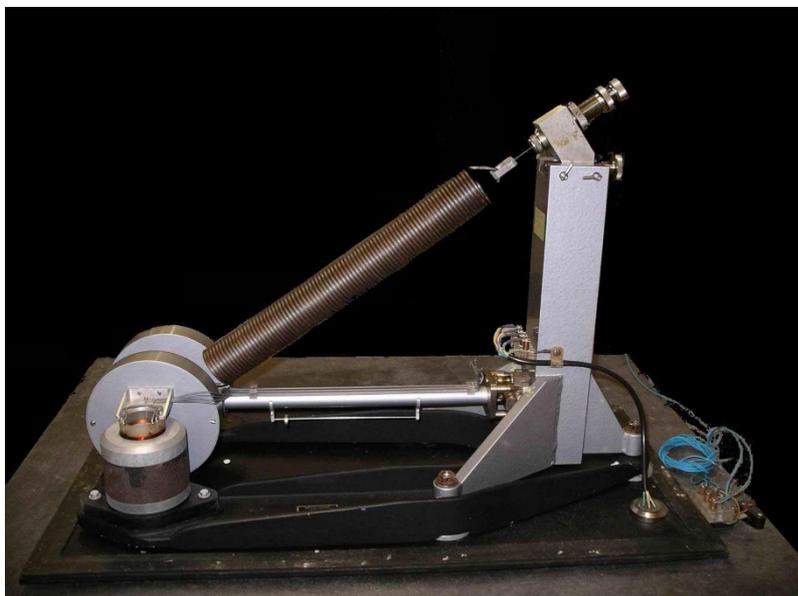
12. Exprimer  $\cos(\alpha)$  en fonction de  $m$ ,  $g$ ,  $k$  et  $\ell$  avec la même approximation.

On donne  $\ell = 60$  cm et  $g = 9,8$  m.s<sup>-2</sup> et on rappelle que  $\alpha \ll 1$  rad.

13. Calculer numériquement le rapport  $k/m$  à l'ordre 1 en  $\alpha$ .

14. Calculer numériquement  $\alpha$  pour obtenir une période propre égale à  $T_0 = 10$  s.

On est donc arrivé à un système dont la période propre est assez grande pour permettre l'enregistrement des vibrations du sol. Il ne reste qu'à étudier le système lors d'un tremblement de terre. Mais cette étude en référentiel non galiléen sera menée en deuxième année.



## II. Détection de particules dans une chambre à bulles

La chambre à bulles a été inventée par Donald A. Glaser en 1952, ce qui lui valut le prix Nobel de physique en 1960.

La chambre à bulles est remplie d'hydrogène liquide maintenu à une température très proche de sa température d'ébullition.

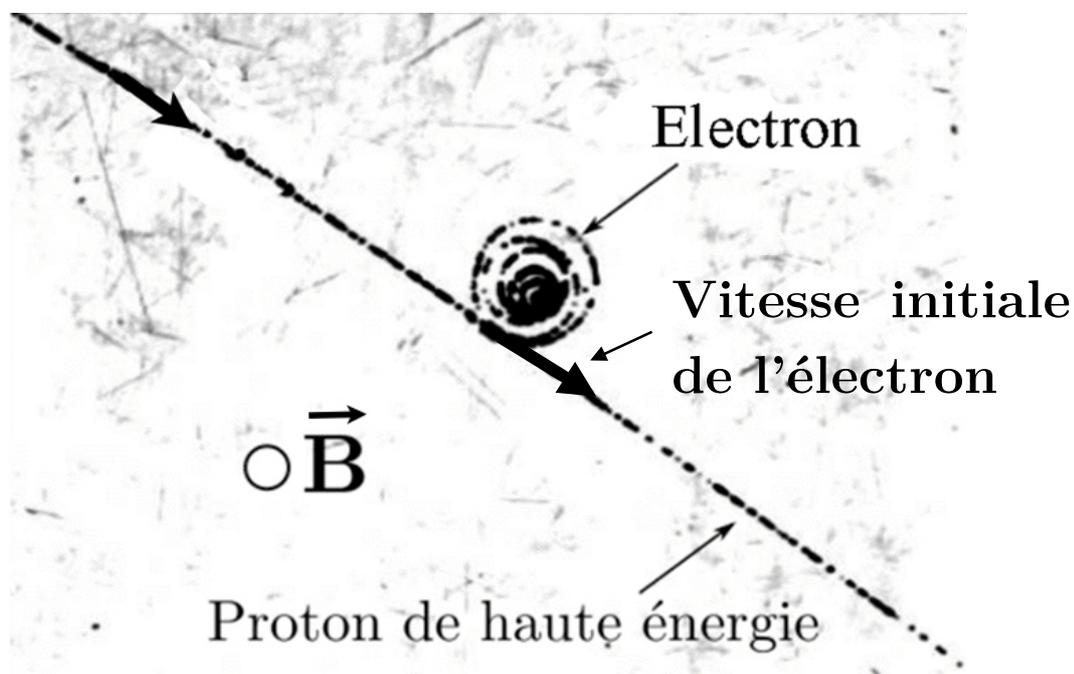
Quand les particules chargées traversent le liquide, elles l'ionisent permettant au liquide de se vaporiser sur leur chemin créant de petites bulles. Ces bulles vont grossir et pourront être détectées par des caméras. On obtient ainsi une vision en trois dimensions de la trajectoire des particules.

La chambre à bulles est plongée dans un champ magnétique puissant : les particules chargées qui la traversent subissent alors la force de Lorentz qui courbe leur trajectoire. En fonction de la direction de la courbure de la trajectoire et du sens du champ magnétique appliqué, on est en mesure de savoir le signe de la particule détectée. De plus, en mesurant le rayon de courbure des trajectoires, on peut mesurer la vitesse à laquelle se déplacent les particules et donc en déduire leur énergie cinétique.

On observe sur la photographie ci-dessous qu'un proton incident de grande énergie cinétique entre en collision avec un électron du milieu, initialement immobile, en lui communiquant de l'énergie cinétique.

On note  $v_0$  la vitesse initiale de l'électron après le choc avec le proton incident.

Cet électron évolue alors dans un plan orthogonal au champ magnétique uniforme extérieur (figure ci-dessous).



1. Préciser le sens du champ magnétique  $\vec{B}$  qui règne dans la chambre à bulles. Un raisonnement clair est attendu.

**A. Etude de la trajectoire de l'électron en l'absence d'interaction avec le milieu**

2. Montrer qu'en l'absence d'interaction avec le milieu et en négligeant le poids de l'électron, la trajectoire de ce dernier est parcourue avec une vitesse de norme constante.

On introduit un repère cartésien dont l'origine est le point O d'impact, dont l'axe des x est selon la vitesse initiale de l'électron, et l'axe des z est colinéaire et de même sens que  $\vec{B}$ .

3. Faire un schéma sur la copie et montrer que la trajectoire de l'électron est plane.

4. Montrer en utilisant le repère de Frenet que la trajectoire est circulaire et déterminer le rayon de la trajectoire en fonction de  $m$ ,  $e$ ,  $v_0$  et  $B = \|\vec{B}\|$ . Représenter cette trajectoire sur le schéma.

5. En déduire la période de rotation de l'électron et la pulsation  $\omega_c$  associée appelée pulsation cyclotron.

**B. Etude de la trajectoire de l'électron en tenant compte de l'interaction avec le milieu**

On tient désormais compte de l'interaction entre l'électron et le milieu, par le biais d'une force de frottement de type Stokes, de coefficient  $\alpha$  :  $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$

6. Etablir dans le repère cartésien défini dans la partie A, les équations différentielles vérifiées par  $x(t)$  et  $y(t)$  et montrer qu'elles sont de la forme :

$$\ddot{x} = -\omega_c \dot{y} - \frac{\dot{x}}{\tau} \quad \text{et} \quad \ddot{y} = \omega_c \dot{x} - \frac{\dot{y}}{\tau}$$

en précisant l'expression de  $\tau$ .

Pour la résolution de ce système couplé on introduit la variable complexe :  $\underline{v} = \dot{x} + i\dot{y}$ .

7. Déterminer l'équation différentielle satisfaite par  $\underline{v}$  et la résoudre en tenant compte des CI.

8. En déduire  $\dot{x}(t)$  et  $\dot{y}(t)$ . Commenter les expressions obtenues.

**[Pour les plus courageux :**

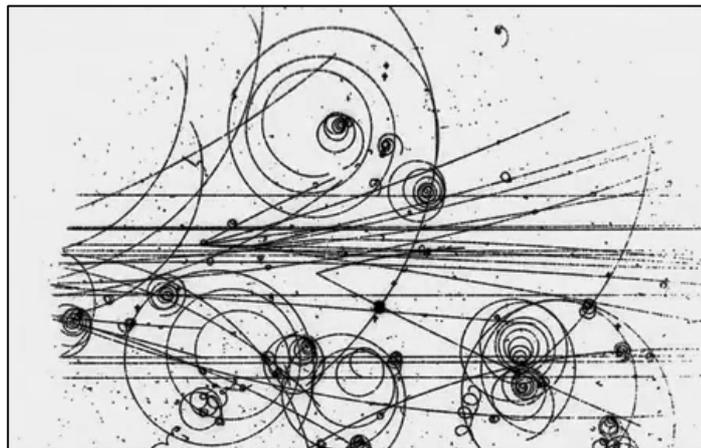
9. Déterminer la primitive de  $\underline{v}$  compatible avec les CI et en déduire que :

$$x(t) = x_0 + R_0 \cos(\omega_c t + \varphi) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad \text{et} \quad y(t) = y_0 + R_0 \sin(\omega_c t + \varphi) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

en déterminant  $x_0$ ,  $y_0$  et  $R_0$ .

Pour information :  $\tan \varphi = \omega_c \tau$ .

10. En déduire les caractéristiques de la trajectoire de l'électron.]



### III. Proxima : mission vers Mars

Dans le film « Proxima », il est question de la préparation de la dernière mission avant le lancement d'un vaisseau habité à destination de Mars.

Nous allons étudier ici divers scénarios pour cette mission finale en direction de Mars.



Données :

	Terre	Mars	Vénus
Rayon de la planète	$R_T = 6370 \text{ km}$	$R_M = 3390 \text{ km}$	$R_V = 6050 \text{ km}$
Masse de la planète	$M_T = 6,0 \times 10^{24} \text{ kg}$	$M_M = 6,4 \times 10^{23} \text{ kg}$	$M_V = 4,9 \times 10^{24} \text{ kg}$
Rayon de l'orbite	$d_{TS} = 150 \times 10^6 \text{ km}$	$d_{MS} = 228 \times 10^6 \text{ km}$	$d_{VS} = 108 \times 10^6 \text{ km}$

#### A. Force centrale conservative

Soit un point matériel M de masse m soumis à une force centrale  $\vec{F} = F(r)\vec{e}_r$  en coordonnées sphériques dont le centre de force est le point O fixe.

1. Montrer que la trajectoire de M est plane.
2. En se plaçant en coordonnées cylindriques (axe Oz perpendiculaire au plan de la trajectoire), établir l'expression de la constante des aires notée C qui relie r et  $\dot{\theta}$ .
3. Montrer que l'énergie mécanique est une intégrale première du mouvement. Etablir l'expression de l'énergie potentielle effective  $E_{p,eff}$  qui permet de ramener le problème étudié à un pseudo problème à un seul degré de liberté. On notera  $E_p(r)$  l'énergie potentielle associée à la force conservative  $\vec{F}$ .

#### B. Trajectoire circulaire

On s'intéresse désormais au cas où la force étudiée est la force gravitationnelle entre la Terre de masse  $M_T = 6,0 \times 10^{24} \text{ kg}$  et le point matériel M qui représente le vaisseau habité.

Ce dernier est initialement sur une orbite circulaire de rayon  $r_1$  à une altitude  $h_1 = 300 \text{ km}$  de la surface de la Terre.

On donne  $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$  à la surface de la Terre.

4. Etablir l'expression de la vitesse  $v_1$  du vaisseau sur sa trajectoire circulaire. Faire l'A.N.
5. Etablir l'expression de la période de rotation  $T_1$  en fonction de  $r_1$  et donner sa généralisation pour les trajectoires elliptiques de demi grand axe a. Faire l'A.N pour le vaisseau.

**C. Phase 1 : éloignement de la Terre**

Le vaisseau active sur une durée très courte son moteur qui lui assure un changement de vitesse quasiment instantané. Sa vitesse reste orthoradiale mais sa norme devient  $v_2$ .

**6.** Déterminer la valeur minimale de  $v_2$  pour que le vaisseau puisse quitter l'attraction gravitationnelle de la Terre. Faire l'A.N.

Le vaisseau se retrouve désormais à grande distance de la Terre et l'influence gravitationnelle de celle-ci devient négligeable devant celle du soleil de masse  $M_S = 2,0 \times 10^{30}$  kg.

**7.** A quelle distance de la Terre doit se trouver le vaisseau pour que l'influence gravitationnelle de celle-ci soit 10 fois moins importante que celle du Soleil ? On considèrera que la distance entre le vaisseau et le Soleil est égale à la distance Terre-Soleil  $d_{TS}$ . Faire l'A.N. L'approximation était-elle finalement justifiée ?

**D. Phase 2 : ellipse de transfert**

Dans cette phase, on considère qu'initialement le vaisseau est en orbite circulaire de rayon  $d_{TS}$  (même orbite que la Terre) autour du Soleil.

**8.** Déterminer la vitesse  $v_3$  du vaisseau dans le référentiel héliocentrique. Faire l'A.N.

Le vaisseau active sur une durée très courte son moteur qui lui assure un changement de vitesse quasiment instantané. Sa vitesse reste orthoradiale mais sa norme devient  $v_4$ .

La vitesse  $v_4$  est telle que le vaisseau se retrouve sur l'orbite elliptique de transfert qui est tangente à celle de la Terre et à celle de Mars (ellipse de Hohmann).

**9.** Faire un schéma où apparaissent ces trois orbites et en déduire le demi-grand axe  $a$  de cette ellipse. Faire l'A.N.

**10.** Exprimer la vitesse  $v_4$  en fonction des données. Faire l'A.N. Calculer de même la vitesse  $v_A$  à l'aphélie de cette trajectoire elliptique.

**11.** Déterminer la durée du trajet sur l'ellipse de transfert précédente. Faire l'A.N.

En approche de l'orbite de Mars, le vaisseau allume de nouveau son moteur et sa vitesse passe instantanément à la valeur  $v_5$  qui lui permet d'être sur la même orbite circulaire que Mars.

**12.** Déterminer le travail du moteur  $W(\text{mot})$  qui permet un tel changement de vitesse. Faire l'A.N. avec  $m = 1000$  tonnes.

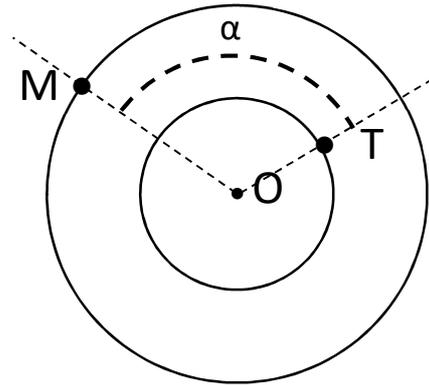
La fin de la mission est une capture gravitationnelle par la planète Mars et une mise en orbite basse avant un atterrissage sur la planète rouge.

### E. Fenêtres de lancement

On admet pour cette partie que la durée totale du trajet entre la Terre et Mars est  $\Delta t = 273$  jours.

On souhaite déterminer les positions relatives de Mars et de la Terre au moment du lancement du vaisseau. Cette position relative est déterminée par l'angle  $\alpha$  entre les deux rayons vecteurs de la Terre  $\vec{OT}$  et de Mars  $\vec{OM}$  lors du lancement.

On note  $\omega_T$  et  $\omega_M$  les vitesses de rotation de la Terre et de Mars autour du Soleil



13. Déterminer l'expression de  $\alpha$  en fonction des données. [Rédiger correctement la réponse].  
Faire l'A.N.

14. Déterminer la périodicité des phases possibles de lancement de la mission.

### F. Scénario n°2 : passage par Vénus

15. Déterminer le temps de trajet si le vaisseau se met initialement sur l'ellipse de transfert qui l'amène dans le voisinage de Vénus et qu'il bascule ensuite sur l'ellipse de transfert entre Vénus et Mars. On néglige les phases intermédiaires et la durée prise en compte sera simplement celle sur les orbites elliptiques.

16. Ce scénario est-il intéressant du point de vue de la consommation de carburant ?

17. Pensez-vous que les femmes soient capables de partir pour des longues missions loin de leurs enfants ?

