

Devoir surveillé n°7

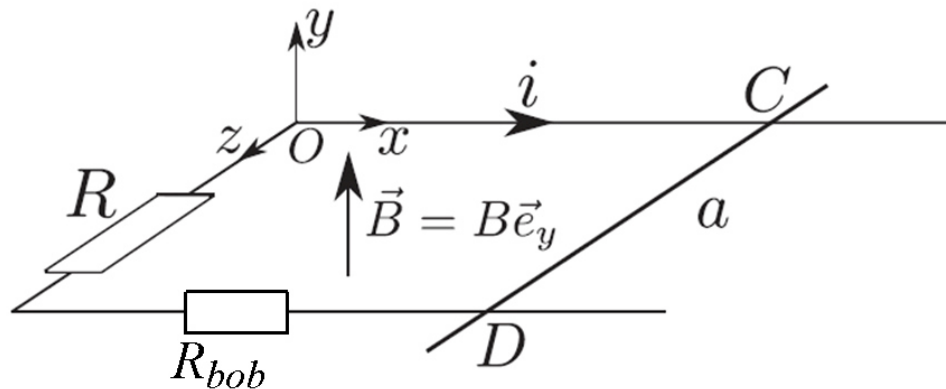
Physique

I. Principe de la recharge par induction (d'après Concours EPITA 2021) :

Dans un DS précédent nous avons évoqué les supercondensateurs qui alimentent un tramway en région parisienne.

Nous allons poursuivre cette étude en nous intéressant à la recharge par induction de ce tramway lors d'un freinage.

Le dispositif réel est une génératrice en rotation, mais nous l'illustrons ici simplement sur le dispositif linéaire des rails de Laplace schématisé ci-dessous. La longueur de la tige mobile entre les deux points de contact C et D est notée a , sa masse m , et elle peut glisser sans frottement sur les rails.



Le champ magnétique extérieur $\vec{B} = B\vec{e}_y$, avec $B > 0$ est stationnaire et uniforme à travers le circuit.

La tige qui modélise le tramway est initialement à l'abscisse $x = 0$, et elle est lancée avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$ avec $v_0 > 0$.

La résistance $R = 200 \Omega$ représente un dipôle résistif à alimenter et $R_{bob} = 4 \Omega$ est la résistance du bobinage.

A. Premier modèle : autoinductance négligeable

Dans ce premier modèle on néglige l'autoinductance du circuit.

1. Proposer une courte analyse qualitative utilisant la loi de Lenz que l'on rappellera.
2. Etablir l'équation électrique du circuit.
3. Etablir l'équation mécanique vérifiée par la tige.
4. En déduire les expressions de $i(t)$ et $v(t)$ et tracer l'allure des courbes correspondantes.
5. Faire un bilan de puissance électrique puis mécanique et enfin électromécanique.

6. Sur l'ensemble du freinage, montrer que l'énergie électrique reçue par le dipôle R est proportionnelle à celle reçue par la résistance R_{bob} . En déduire le rendement r de la conversion d'énergie cinétique en énergie électrique en fonction de R et R_{bob} :

$$r = \frac{E_r(R)}{E_C(t = 0)}$$

7. A.N. : le tramway a une masse $m = 50$ tonnes et roule à $v_0 = 40$ km/h lorsqu'il commence son freinage. Sachant que l'énergie maximale stockée dans les supercondensateurs de cette rame est de l'ordre de 50 MJ déterminer le pourcentage de la recharge que peut assurer la récupération d'énergie par induction.

B. Deuxième modèle : prise en compte de l'autoinductance

On prend désormais en compte l'auto-induction dans le circuit et on note L l'inductance propre du circuit. Initialement l'intensité dans le circuit est nulle.

8. Etablir la nouvelle équation électrique du circuit.

9. En déduire l'équation différentielle du 2^{ème} ordre vérifiée par v.

10. Quel type de régime transitoire semble le plus souhaitable ? En déduire l'expression du champ magnétique en fonction des différents paramètres du système pour qu'il en soit ainsi.

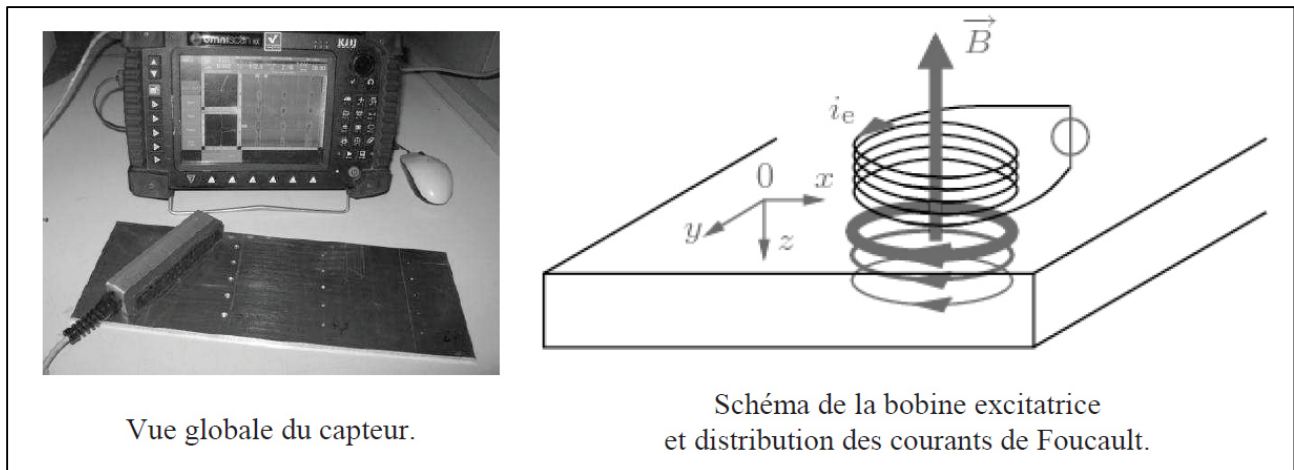
11. Dans ces conditions, résoudre le système différentiel et en déduire v(t) et i(t).



II. Sonde à effet inductifs (d'après CCP – PSI 2016) :

Dans le but de contrôler les infrastructures métalliques, il a été développé des méthodes de contrôle non destructifs (CND) utilisant des capteurs à courants de Foucault.

Le principe général du CND à courants de Foucault est le suivant : une bobine excitatrice génère un champ magnétique variable qui diffuse dans le matériau à sonder. Il se développe alors des courants de Foucault dont la géométrie des lignes de courants est affectée en cas de défauts du type fissure, caverne ou autres. Une sonde enregistre la réponse des courants de Foucault et forme d'une certaine manière une image des éventuels défauts présents dans la structure.



Vue globale du capteur.

Compte-tenu de leur faible coût et de leur facilité d'utilisation, ces CND à courants de Foucault sont très utilisés. Ils présentent néanmoins quelques inconvénients, en particulier, les défauts masqués en surface et profondément noyés dans l'épaisseur des conducteurs sont plus difficiles à détecter sur les structures en acier, qu'avec les autres métaux.

Les défauts du type piqûres micrométriques orthogonales à la surface locale des conducteurs sont quasi-indétectables.

Un décollement ou une inclinaison de la sonde du CND par rapport à la surface de la pièce amenuise la détection.

[...]

Validation du concept de la sonde à fonctions séparées

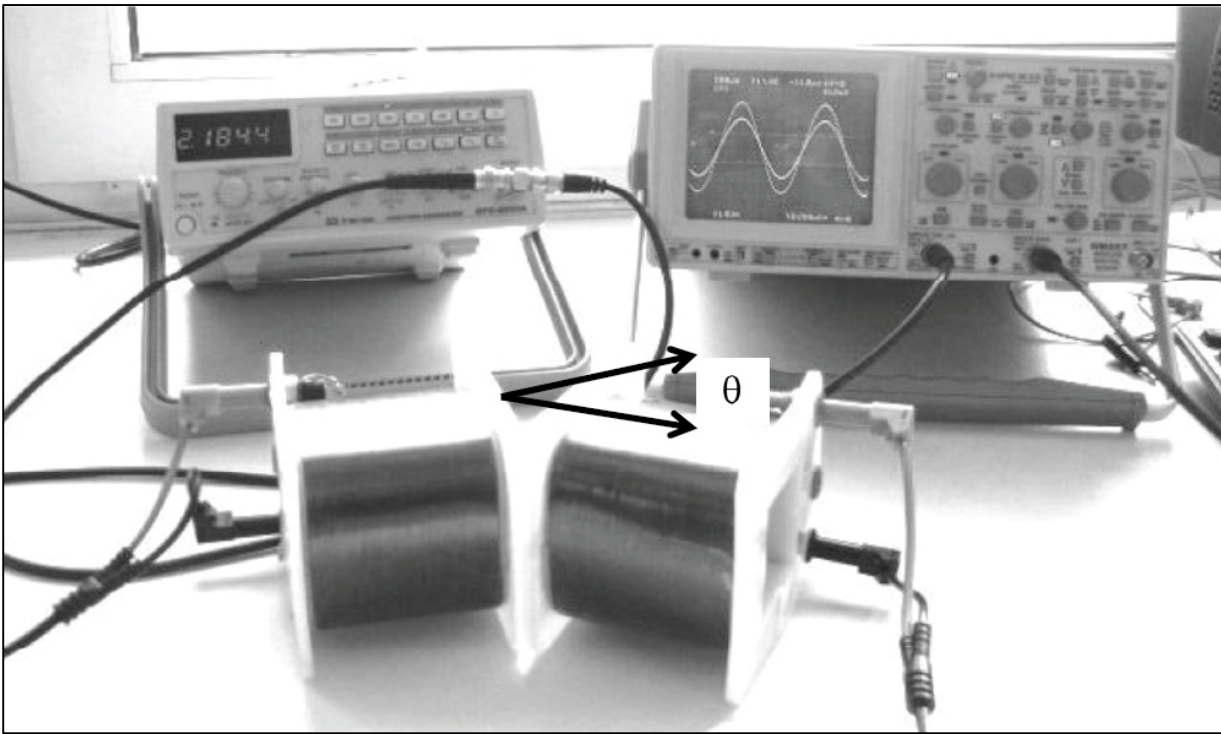
On s'intéresse dans la suite à un capteur CND dit à fonctions séparées. Dans ce type de capteur à deux sondes, les fonctions de génération des courants de Foucault et leur détection sont séparées. La détection se fait par l'intermédiaire d'une seconde sonde siège d'une tension induite générée par le champ magnétique, dit de réaction, créé par les courants de Foucault

Afin de valider le concept de détection du champ de réaction et d'en déterminer ses limites, on se propose de reconstruire une telle situation à l'aide de matériels simples utilisés au laboratoire.

On réalise l'expérience avec le matériel décrit sur la photo ci-après.

Le générateur basse fréquence (GBF) alimente la bobine de gauche avec une tension sinusoïdale $u_1(t)$ visualisée sur la voie 1 de l'oscilloscope. Le circuit 1 ne comporte pas d'autres dipôles.

On observe sur la voie 2 de l'oscilloscope la tension $u_2(t)$ aux bornes de la bobine de droite. Le circuit 2 ne comporte que la bobine et l'oscilloscope : on peut donc considérer que c'est un **circuit ouvert**.



Les deux bobines sont identiques d'autoinductance L et de résistance r .

1. En faisant apparaître l'inductance mutuelle M , proposer un schéma électrique du montage global sans oublier d'y faire figurer les branchements de l'oscilloscope (Y_1 et Y_2), le GBF et la masse.

On définit la fonction de transfert $\underline{H}(\omega) = \underline{u}_2/\underline{u}_1$.

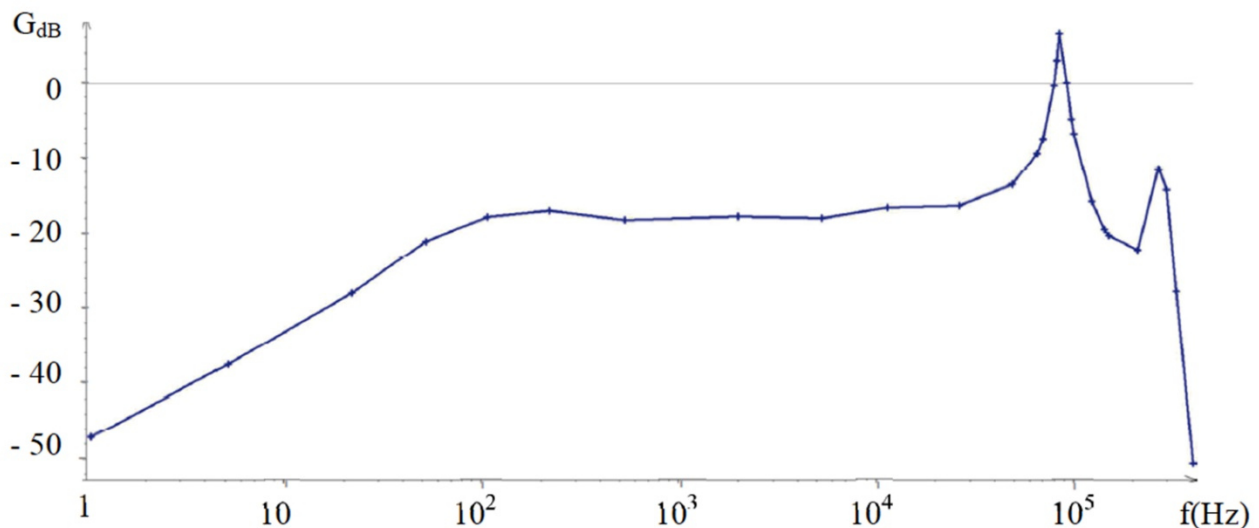
2. Montrer que cette fonction de transfert peut se mettre sous la forme canonique :

$$\underline{H}(\omega) = H_0 \frac{j\omega/\omega_0}{1 + j\omega/\omega_0}$$

en donnant les expressions de H_0 et de ω_0 en fonction des éléments de modélisation définis précédemment.

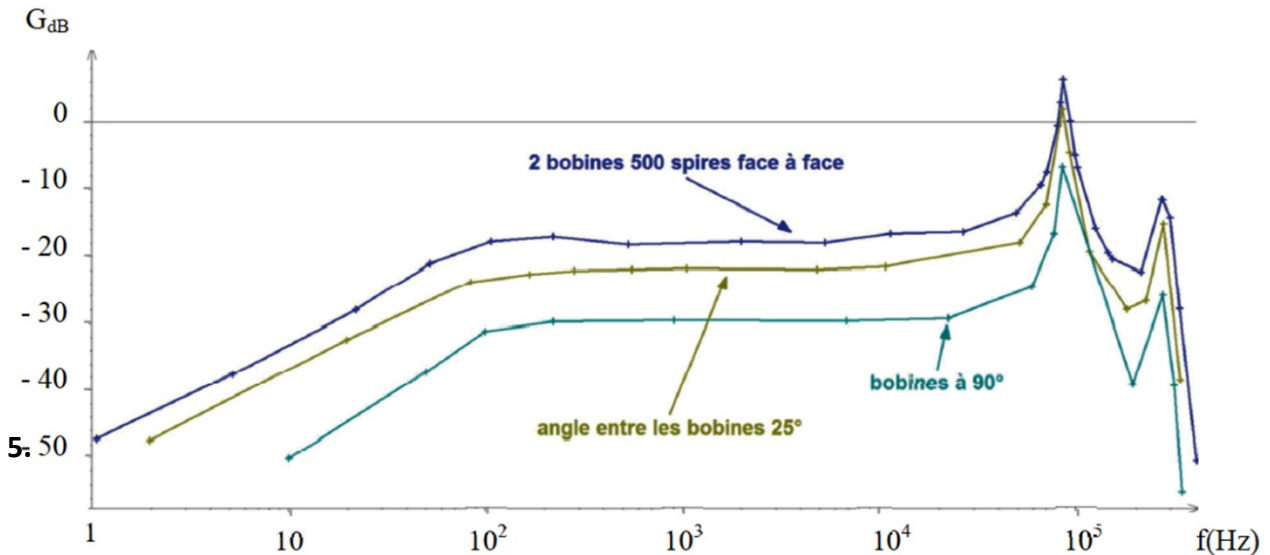
3. De quel type de filtre s'agit-il ? Quelles sont les équations de ses asymptotes dans un diagramme de Bode du gain en dB ?

On donne ci-dessous le diagramme de Bode en amplitude associé à la fonction de transfert précédente, dans le cas où les deux bobines sont face à face. L'angle entre les axes des bobines est alors nul.



4. Ce diagramme de Bode, en amplitude, correspond-il à la fonction de transfert déterminée précédemment ? Si non, proposer une limitation à votre modèle en précisant en une ou deux phrases le(s) phénomène(s) physique(s) présent(s) et non décrit(s) par votre modèle.

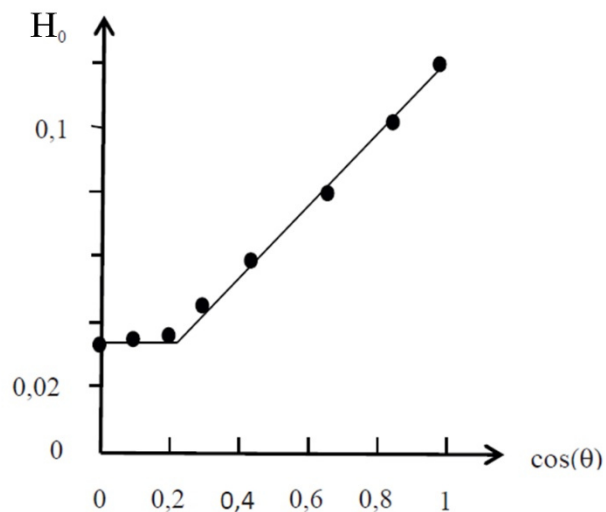
On fait varier l'angle θ entre les axes des deux bobines et on obtient les trois diagrammes de Bode, en amplitude, décrit sur le graphe de la figure ci-dessous.



5. Quel est l'élément de modélisation du schéma électrique qui est modifié lorsque θ varie ? Quel paramètre de la fonction de transfert en est alors modifié ?

6. À partir de la figure précédente, déterminer la valeur numérique de H_0 pour un angle $\theta = 25^\circ$.

On a relevé expérimentalement la dépendance de H_0 en fonction de l'angle θ . On a représenté ensuite le graphe de H_0 en fonction de $\cos(\theta)$ comme le montre la figure ci-dessous. Ce graphe semble être linéaire par partie.



7. Pourquoi est-il pertinent de représenter le graphe de H_0 en fonction du cosinus de l'angle θ entre les axes des deux bobines ? Est-ce cohérent avec la courbe obtenue ?

8. Expliquer pourquoi une inclinaison de la sonde à fonctions séparées des CND détériore la qualité de contrôle des conducteurs métalliques.

III. Eolienne (d'après CAPES 2013) :

Le dispositif étudié dans ce problème est un alternateur, élément d'une éolienne individuelle susceptible d'alimenter un système de pompage ou une habitation.

Lorsqu'elle fonctionne de façon optimale, elle fournit une puissance électrique $P_N = 6 \text{ kW}$ et sa vitesse de rotation moyenne est $\omega = 150 \text{ tr/min}$.

Le vent fait tourner les pales de l'éolienne qui entraînent le rotor de la machine électrique, qui crée alors de l'électricité.



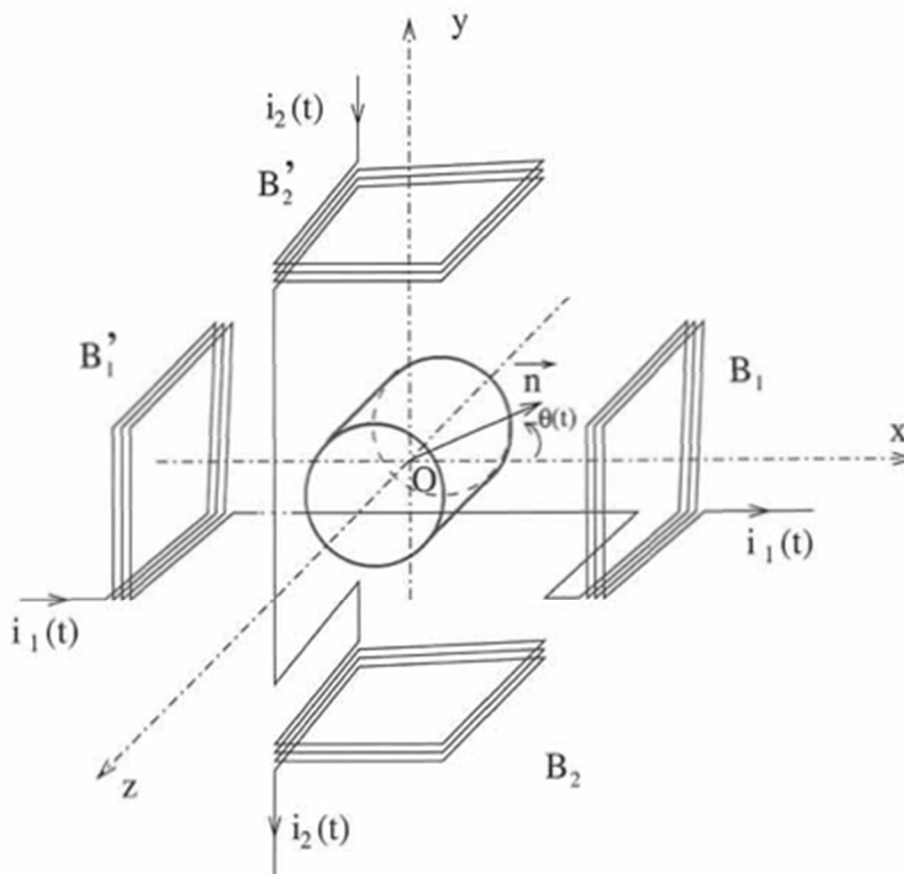
Le rotor est un solide de moment d'inertie J par rapport à l'axe (Oz) , pouvant tourner autour de cet axe. Il est doté de propriétés magnétiques, et est assimilé à un aimant permanent, caractérisé par son moment magnétique $\vec{m} = m_0 \vec{n}$ où m_0 est la valeur du moment magnétique de l'aimant et \vec{n} un vecteur unitaire tournant contenu dans le plan xOy , repéré par l'angle $\theta(t)$ qu'il fait avec l'axe (Ox) .

Le rotor crée dans son environnement un champ magnétique que l'on notera \vec{B}_r .

Le rotor est entraîné par un système mécanique non représenté, qui exerce un couple moteur dont le moment par rapport à l'axe (Oz) est noté : $\vec{\Gamma}_m = \Gamma_m \vec{e}_z$ avec $\Gamma_m > 0$.

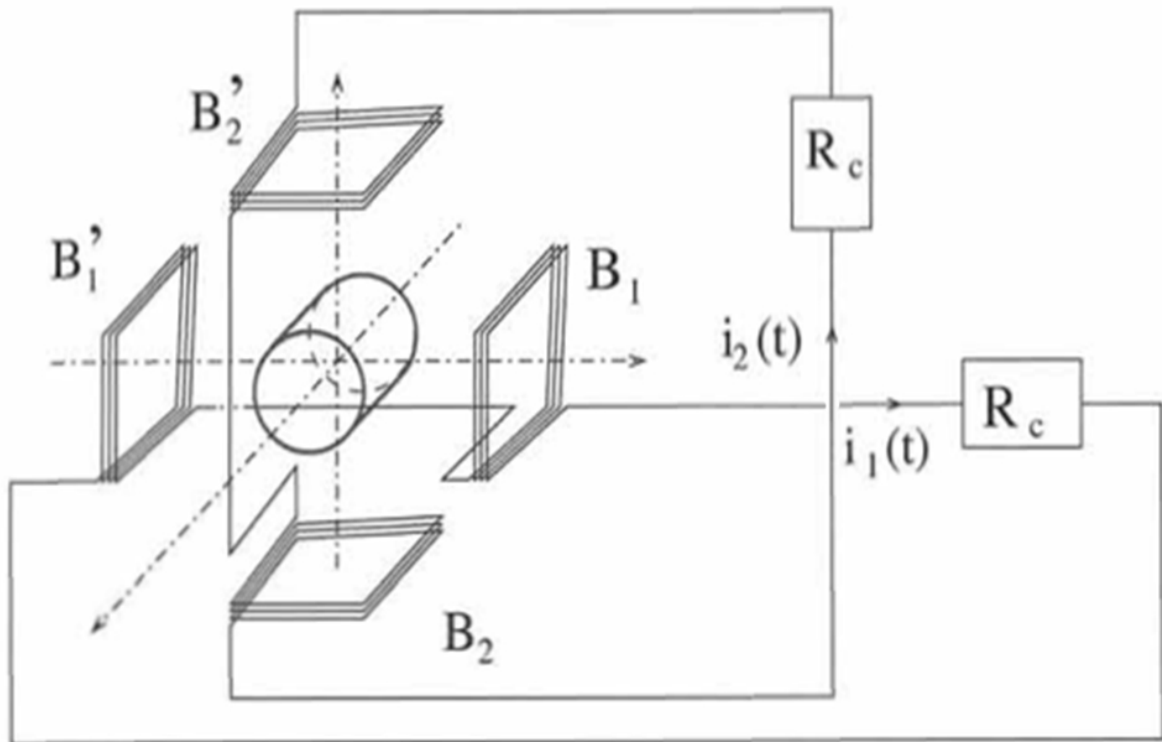
Le stator de l'alternateur est constitué de deux associations de quatre bobines identiques (B_1, B_1') et (B_2, B_2') . Les bobines (B_1, B_1') sont connectées en série et elles ont leur axe commun avec des sens de bobinage identiques.

De même, les bobines (B_2, B_2') sont connectées en série de la même manière, mais leur axe est décalé d'un angle de $\pi/2$ par rapport à l'axe des bobines (B_1, B_1') .



Chaque association de bobines forme un circuit fermé sur une charge de résistance R_c .

Chaque bobine a une résistance $r = 1 \Omega$ et une autoinductance $L = 0,2 \text{ mH}$.



Dans ce problème, nous ne nous intéresserons qu'au fonctionnement de l'alternateur en régime permanent mécanique, c'est-à-dire lorsque la vitesse de rotation du rotor Ω est une constante positive. L'origine du temps est choisie de telle sorte que $\theta(t) = \Omega t$.

Le flux ϕ_1 du champ magnétique du rotor \vec{B}_r à travers les bobines (B_1, B_1') est assez difficile à calculer, mais on admet avec une bonne approximation qu'il peut s'écrire comme le produit scalaire suivant :

$$\phi_1 = \phi_0 \vec{n} \cdot \vec{e}_x$$

où ϕ_0 est une constante positive.

Il est donc proportionnel au produit scalaire entre le vecteur unitaire \vec{n} qui dirige le moment magnétique porté par le rotor et le vecteur \vec{e}_x normal aux sections des bobines (B_1, B_1'). On définit de manière analogue le flux ϕ_2 à travers les bobines (B_2, B_2'), soit $\phi_2 = \phi_0 \vec{n} \cdot \vec{e}_y$.

1. En déduire les forces électromotrices induites $e_1(t)$ et $e_2(t)$ dans les bobines (B_1, B_1') et (B_2, B_2') par le rotor en fonction de ϕ_0, Ω et t .
2. En déduire le schéma électrique équivalent à l'ensemble des bobines (B_1, B_1' en série) fermées sur la charge R_c puis l'équation différentielle vérifiée par l'intensité $i_1(t)$. En déduire de même l'équation différentielle vérifiée par $i_2(t)$. Aucun couplage entre les bobines n'est ici pris en compte.

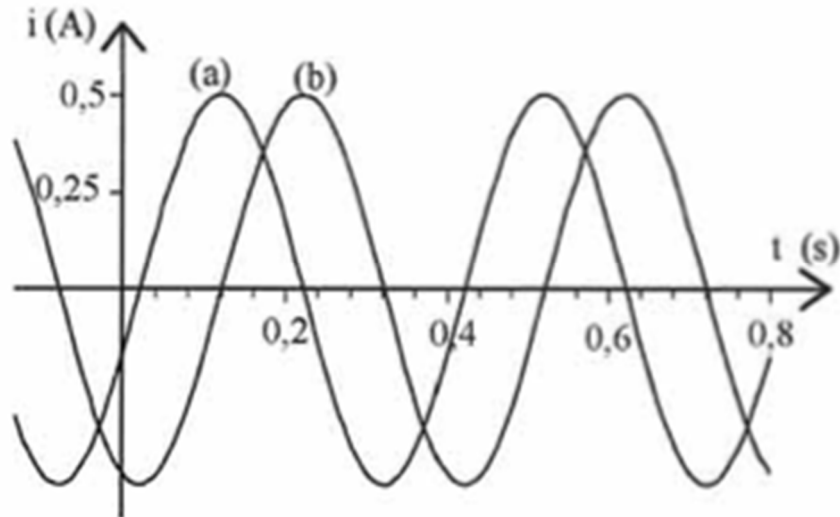
On se place dans toute la suite en régime sinusoïdal forcé.

3. Montrer que les intensités $i_1(t)$ et $i_2(t)$ se mettent sous la forme suivante et exprimer i_m :

$$i_1(t) = i_m \cos\left(\Omega t - \frac{\pi}{2} - \varphi\right) \quad \text{et} \quad i_2(t) = i_m \cos(\Omega t - \pi - \varphi)$$

avec $\tan \varphi = 2L\Omega/(2r + R_C)$.

4. Les courbes (a) et (b) présentées ci-dessous sont celles des intensités $i_1(t)$ et $i_2(t)$ en fonction du temps :



Déterminer si la courbe (a) correspond à l'intensité i_1 ou l'intensité i_2 [justifier la réponse !].

5. Déduire de ces courbes la vitesse de rotation du rotor. Comparer cette valeur à la vitesse de rotation du fonctionnement optimal.

6. On note $\langle P_R \rangle$ la somme de la puissance électrique moyenne reçue par les deux résistances de charge R_C et de la puissance dissipée par effet Joule dans les bobinages. Déterminer l'expression de $\langle P_R \rangle$.

On s'intéresse dans la suite à une description mécanique du rotor. La liaison pivot de celui-ci sur l'axe (Oz) est supposée idéale.

On admet que l'association de bobines (B_1, B_1') crée au niveau du rotor un champ magnétique \vec{B}_1 proportionnel à l'intensité $i_1(t)$: $B_1 = k i_1$.

De même, l'association (B_2, B_2') crée au niveau du rotor un champ magnétique \vec{B}_2 proportionnel à l'intensité $i_2(t)$: $B_2 = k i_2$.

7. En déduire que le champ résultant $\vec{B}_{stat} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$ est un champ tournant à la vitesse Ω et faisant, à un instant t quelconque, un angle α à déterminer avec l'axe (Ox). Exprimer le norme B_0 de ce champ tournant.

8. Déterminer l'expression du couple Γ_L exercé par le champ \vec{B}_{stat} sur le rotor. [rappel : $\cos(\arctan x) = 1/\sqrt{1+x^2}$].

9. En déduire l'expression du couple moteur Γ_m exercé sur le rotor afin que celui-ci tourne à vitesse constante. En déduire l'expression de la puissance mécanique motrice moyenne P_m .

10. A l'aide du théorème de Neumann, établir une relation simple entre ϕ_0 , m_0 et k [on pourra s'intéresser au flux du rotor à travers les bobines (B_1 , B_1'). Contrôler l'homogénéité du résultat ainsi obtenu.

11. A.N. : les charges ont une résistance $R_c = 50 \Omega$.

(a) Déterminer, par lecture graphique, l'intensité efficace I_{eff} dans chacun des circuits.

(b) Déduire de l'expression de i_m , la valeur du flux ϕ_0 .

(c) Calculer le coefficient k en assimilant les champs magnétiques aux champs qui seraient créés au cœur d'un solénoïde comportant $n = 10^4$ spires. m^{-1} . On donne : $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$.

(d) En déduire la valeur du moment magnétique m_0 .

(e) Le rotor est constitué d'un aimant au néodyme dont l'aimantation volumique M_{vol} (moment magnétique par unité de volume) est égale à 10^6 A.m^{-1} . En considérant l'aimant sous la forme d'un cylindre de rayon R et de hauteur égale à $4R$, en déduire les dimensions de cet aimant.

