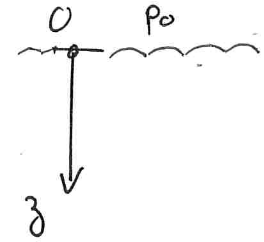
PCSI 1 21.22

DS n° 9

II Expédition Deep Sea Challenger

1. Principe fondamental de la statique en réf galiléen :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, p = \rho \vec{g} \quad ; \quad \frac{dp}{dz} = \rho \vec{g} \cdot \vec{e_z} \quad ; \quad \frac{dp}{dz} = +\rho g \text{ avec } \downarrow z$$

2 

$$: \frac{dp}{dz} = \rho_0 g \quad \Rightarrow \quad p(z) = Cte + \rho_0 g z$$

et $p(z=0) = p_0 = cte$

donc $\boxed{p(z) = p_0 + \rho g z}$

3. Pour une masse m de fluide : $\rho = \frac{m}{V}$ donc $d\rho = -\frac{m\, dV}{V^2}$

En divisant par $\rho = m/V$: $\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dV}{V}$ d'où

$$\boxed{\chi_T = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp}}.$$

R: on peut aussi remplacer V par $\frac{m}{\rho}$ ds l'expression de χ_T. $\left(\frac{d^{m}/_{\rho}}{dp} = -\frac{m}{\rho^2} \cdot \frac{d\rho}{dp}\right)$

4. On a, à $T = Cte$:

$$\frac{dp}{dz} = \rho(z) \cdot g \quad \text{donc} \quad \frac{dp}{d\rho} \cdot \frac{d\rho}{dz} = \rho(z) g \quad \text{soit :}$$

$$\frac{d\rho}{dz} = \rho(z) \cdot g \cdot \frac{d\rho}{dp} = \rho^2(z) \cdot g \cdot \chi_T .$$

On sépare les variables et on intègre entre $z=0$ et z :

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho^2} = \int_0^z g \chi_T \, dz \quad : \quad -\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_0} = g \chi_T z$$

D'où : $\boxed{\rho = \frac{\rho_0}{1 - \rho_0 g \chi_T z}}$

5. Finalement : $dp = \rho(z) g \, dz = \dfrac{g \rho_0 \, dz}{1 - \rho_0 \chi_T g z}$

Intégration entre $z=0$ et z : $p - p_0 = -\dfrac{1}{\chi_T}\left[\ln|1-\rho_0 \chi_T g z|\right]_0^z$

D'où $\boxed{p(z) = p_0 - \dfrac{1}{\chi_T} \ln(1 - \chi_T \rho_0 g z)}$

6. $p(z = 10{,}9.10^3 \, m) = 1{,}12 \times 10^8$ Pa.

Ce modèle est donc tout à fait adapté à de telles profondeurs.

R : avec $\rho = \rho_0 = cte$ on arrive à : $1{,}09.10^8$ Pa ce qui est également adapté (écart de 4%) - [tous ces calculs pour 4% ....] [* à l'équilibre]

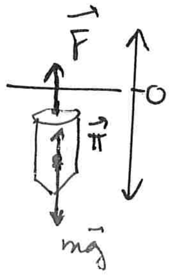
7. Th d'Archimède : un corps immergé dans un fluide* subit une résultante des forces de pression, notée $\vec{\Pi}$, opposée au poids du fluide déplacé. [et appliquée au centre de poussée C qui est le barycentre du fluide déplacé].

Ici $\boxed{\begin{array}{l} \vec{\Pi} = -\rho_{eau} V_{ssm} \vec{g} \\ \|\vec{\Pi}\| = 254{,}8 \text{ kN} \end{array}}$ avec $V_{ssm} = \pi \left(\dfrac{D}{2}\right)^2 \times H$. $= 25{,}5 \, m^3$

avec $\rho_{eau} = \rho_0$.

Cette force est indépendante de la profondeur si on néglige les variations de ρ avec z.

8. Syst : le sous marin à la descente : masse m_1.



Réf : t.c. galiléen

Forces : $m_1 \vec{g}$, $\vec{\Pi}$, $\vec{F} = -\frac{1}{2} \rho_0 C_x S v^2 \vec{e_z}$

PFD : $m_1 \dfrac{d\vec{v}}{dt} = -\dfrac{1}{2} \rho_0 C_x S v^2 \vec{e_z} + m_1 \vec{g} + \vec{\Pi}$.

La solution de cette équation tend vers $\vec{v}_{lim}$ telle que

$$0 = -\frac{1}{2} \rho_0 C_x S v_{lim}^2 + m_1 g - \|\vec{\Pi}\|$$

On peut donc déterminer $m_1 g - \|\vec{\Pi}\|$ (= poids apparent)
à partir de v_{lim} : $m_1 g - \|\vec{\Pi}\| = \frac{1}{2}\rho_0 C_x S v_{lim}^2$

(H) : on néglige la durée du régime transitoire devant le tps total de chute : $v_{lim} = \frac{z_{max}}{\Delta t_{desc.}} = 1,21\,m s^{-1}$!

et $m_1 g - \|\vec{\Pi}\| = 887$ N $\Rightarrow$ $m_1 = 26,11$ tonne.

De m̂ à la remontée : $0 = +\frac{1}{2}\rho_0 C_x S v_{lim}'^2 + m_2 g - \|\vec{\Pi}\|$

donc $m_2 g - \|\vec{\Pi}\| = -\frac{1}{2}\rho_0 C_x S v_{lim}'^2 = -4097$ N. $\left(v'_{lim} = \frac{z_{max}}{\Delta t_m} \right.$

D'où $m_2 = 25,60$ tonne $\left. v'_{lim} = 3,6\,m/s \right)$

Finalement $\boxed{m_{ballast} = m_1 - m_2 = \frac{1}{2g}\rho_0 C_x S (v_{lim}^2 + v_{lim}'^2) = 509\,kg}$

R : Le volume du ballast est faible car il est sûrement en acier ($\rho \sim 8000\,kg\,m^{-3}$) et $V_{ballast} \sim 60\,L \ll V_{ssm}$.

R :

Dans ces questions ouvertes et difficiles, il est important de chercher au brouillon et de présenter proprement et en rédigeant clairement la réponse, même partielle, à la question posée.

Les étapes intermédiaires sont valorisées dans la notation mais il faut que la copie ne soit pas une succession de calculs : REDIGER vos réponses !

9. La composition de l'air est approximativement :

$$\boxed{x_{O_2} = 20\% \quad \text{et} \quad x_{N_2} = 80\%}$$

$P_{tot} = P_{O_2} + P_{N_2}$ avec $\boxed{\begin{array}{l} P_{O_2} = x_{O_2} \cdot P_{tot} = 0{,}20 \text{ bar} \\ P_{N_2} = x_{N_2} \cdot P_{tot} = 0{,}80 \text{ bar} \end{array}}$

10. Si la concentration en dioxygène est $[O_2]_i = n_i / V_{int}$

alors la q. de matière ds 1 inspirat° V_p est $n_i \times \dfrac{V_p}{V_{int}}$

$\dfrac{1}{4}$ de cet oxygène est consommé donc $\boxed{n_{i+1} = n_i - \dfrac{1}{4} n_i \cdot \dfrac{V_p}{V_{int}}}$

c'est une suite géométrique de raison $1 - \dfrac{V_p}{4 V_{int}}$.

D'où : $\quad n_i = n_0 \cdot \left(1 - \dfrac{V_p}{4 V_{int}}\right)^i$

Finalement $\quad p_{O_2}^i = n_i \dfrac{RT}{V_{int}} = n_0 \dfrac{RT}{V_{int}} \cdot \left(1 - \dfrac{V_p}{4V_{int}}\right)^i = \boxed{p_{O_2}^0 \left(1 - \dfrac{V_p}{4 V_{int}}\right)^i = p_{O_2}^i}$

11. On cherche i tel que $p_{O_2}^i \geq p_{O_2\,lim}$:

$$\Rightarrow \quad i \ln\left(1 - \frac{V_p}{4 V_{int}}\right) \geqslant \ln\left(\frac{p_{O_2\,lim}}{p_{O_2\,0}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad i \leqslant \frac{\ln\left(p_{O_2\,lim} / p_{O_2\,0}\right)}{\ln\left(1 - V_p / 4 V_{int}\right)} = 12\,300. \qquad \left(V_{int} = \pi \left(\frac{D_{int}}{2}\right)^2 h\right)$$

Il a droit à $\boxed{12\,300 \text{ inspirations soit} \sim 50 \cdot 10^3 \text{ s} \sim 14 \text{ h}.}$

La marge est assez grande mais il ne faut pas paniquer !

I. Sonder l'atmosphère

1. Il s'agit d'établir l'éq. de la statique des fluides sur une particule élémentaire de géométrie simple.

Syst : la particule de fluide cylindrique (section S)

Ref : terrestre considéré galiléen

Forces : $\rho_{air} S dz \vec{g}$; $p(z) S \vec{e_z}$; $-p(z+dz) S \vec{e_z}$; $\vec{F}_{latérales}$

Par symétrie, les forces latérales se compensent et il reste selon $\vec{e_z}$: $-\rho S g dz + p(z) S - p(z+dz) S = 0$

or $\frac{p(z+dz) - p(z)}{dz} = \frac{dp}{dz}$ donc $-\rho g dz - \frac{dp}{dz} \cdot dz = 0$

D'où $\boxed{\frac{dp}{dz} = -\rho g}$

Comme l'air est un gaz parfait : $\rho = \frac{m}{V} = \frac{nM}{V} = \frac{pM}{RT_0}$

et $\boxed{\frac{dp}{dz} = -\frac{Mg}{RT_0} p.}$

2. Résolution : $p = A e^{-z/H}$ avec $\boxed{H = \frac{RT_0}{Mg} = 8,4 \text{ km}}$

De plus $p(0) = p_0 = A$ $\boxed{p(z) = p_0 e^{-z/H}}$

3. $p = p_0/2 = p_0 e^{-z_{50}/H}$

$\Rightarrow$ $\boxed{z_{50} = H . \ln 2 = 5,8 \text{ km.}}$

4. Dans la troposphère ($z < 15$ km), T décroit linéairement avec z alors que dans la stratosphère T est presque constante (elle augmente un peu avec z).

5. Bon profil puisqu'il est affine décroissant !

$T_0 \simeq 25°C = 298 K$ et $\boxed{a = \left|\frac{\Delta T}{\Delta z}\right| = \frac{65°C}{10.10^3} = 6,5 \text{ °C/km.} = 6,5.10^{-3} \text{ °C/m ou K/m}}$

(⚠ $a = \frac{1}{|\text{pente}|}$ car la courbe est $h(T)$!)

6. On a : $\frac{dp}{dz} = -\rho g$ avec $\rho = \frac{Mg}{R(T_0 - az)} \times p$

donc $\frac{dp}{p} = -\frac{Mg\,dz}{R(T_0 - az)}$ $\Rightarrow$ $\ln \frac{p}{p_0} = +\frac{Mg}{Ra} \ln\left(\frac{T_0 - az}{T_0}\right)$

Finalement $\boxed{p = p_0\left(1 - \frac{az}{T_0}\right)^{Mg/Ra}}$ $\boxed{b = \frac{a}{T_0} \text{ et } \alpha = \frac{Mg}{Ra}}$

$$\boxed{\begin{array}{l} b = \dfrac{6,5.10^{-3}\,(K/m)}{298\,(K)} = 2,2.10^{-5}\ m^{-1} \\ \alpha = \dfrac{Mg}{Ra} = \dfrac{29.10^{-3}.\ 9,81}{8,314\ .\ 6,5.10^{-3}} = 5,3 \end{array}}$$

$\left(\frac{kg.mol^{-1}.m\,s^{-2}}{kg\,m^2 s^{-2}.K^{-1}mol^{-1}.K.m^{-1}}\right)$

ss unité !

7. DL1 en $\varepsilon = bz \ll 1$:

$$p(z) = p_0\,(1 - \alpha b z) + o(bz) = p_0\left(1 - \frac{Mg}{RT_0} z\right)$$

Or le modèle isoT donne pour $z \ll H$:

$$p(z) = p_0\,(1 - z/H) + o(z/H) = p_0\left(1 - \frac{Mg}{RT_0} z\right)$$

Les 2 modèles donnent les m̂ résultats si z est faible.

8. g_{sol} est l'approximation de $\frac{gM_T}{(R_T + z)^2}$ pour $z \ll R_T$.

On peut donc calculer:

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{\Delta g}{g} = \dfrac{\dfrac{gM_T}{R_T^2} - \dfrac{gM_T}{(R_T+z)^2}}{\dfrac{gM_T}{R_T^2}} = 1 - \dfrac{R_T^2}{(R_T+z)^2} \\ = 0,6\% \qquad \left[\simeq 2\,z/R_T\right] (DL1.) \end{array}}$$

$\Rightarrow$ La variation de g est très faible même pour des hauteurs de plusieurs dizaines de km.

9. Au décollage : $\boxed{m_{He} = n_{He} \cdot M_{He} = \frac{p_0 V}{R T_0} \cdot M_{He} = 16{,}7 \text{ kg}}$

10. Syst : le ballon-sonde.
Ref : t.c.g.
Forces : $m\vec{g} + m_{He}\vec{g}$; $\vec{\Pi} = -m_{air}\vec{g}$; $\vec{R_N}_{sol}$.
A la limite du décollage : $\vec{R_N} = \vec{0}$ d'où

$$mg + m_{He}\,g - m_{air}\,g = 0$$

avec $m_{air} = n_{air} \cdot M_{air} = n_{He} \cdot M_{air}$ car $n_{air} = n_{He}$ ($\hat{m}$ p, V et T)

$$= \frac{m_{He}}{M_{He}} \cdot M_{air}$$

$$\Rightarrow \boxed{m = m_{He}\left(\frac{M_{air}}{M_{He}} - 1\right) = 104 \text{ kg.}}$$

Pour le décollage il faut que $m < 104$ kg.

11. $m = 20$ kg $< m_{critique}$: le ballon décolle !
Le ballon plafonne quand $\vec{\Pi} + (m + m_{He})\vec{g} = \vec{0}$

soit $m = \frac{p \cdot V}{R T_0} M_{He}\left(\frac{M_{air}}{M_{He}} - 1\right)$ donc la limite

correspond à $\boxed{p = \frac{m R T_0}{V(M_{air} - M_{He})} = 0{,}19 \text{ bar}}$.

Or $p = 0{,}19$ bar correspond à $\boxed{z = H \ln \frac{p_0}{p} = 14{,}0 \text{ km.}}$

III Interférences

1. Rigol® bien sûr ! (Action à 60,81 $ ce jour !)

2. Il suffit de faire un changement de variable : $X = x - L$:

$$s_2(X,t) = s_0 \cos\left(2\pi f\left(t - \frac{X}{c}\right)\right)$$

D'où $\boxed{s_2(x,t) = s_0 \cos\left(2\pi f\left(t - \frac{x-L}{c}\right)\right)}$

3. La superposition de ces 2 signaux déphasés de $\Delta\Phi$

avec $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = 2\pi f\left(t - \frac{x_3 - L}{c}\right) - 2\pi f\left(t - \frac{x_3}{c}\right) = 2\pi f \frac{L}{c}$

donne : $s_{tot,m}^2 = 2s_0^2 + 2s_0^2 \cos\left(2\pi f \frac{L}{c}\right)$ d'après Fresnel

$$\Rightarrow \boxed{s_{tot,m} = \sqrt{2}\, s_0 \sqrt{1 + \cos\left(2\pi f \frac{L}{c}\right)}}$$

4. Cette amplitude ne dépend pas de x_3.

5. Amplitude maximale si $\cos\left(2\pi f \frac{L}{c}\right) = 1$

soit $2\pi f \frac{L}{c} = 2k\pi$ $\quad k \in \mathbb{N}$ $\quad \Rightarrow \boxed{L_k = k\frac{c}{f} = k\lambda}$

6. $s_1(M,t) = s_0 \cos\left(2\pi f\left(t - \frac{S_1M}{c}\right)\right)$

7. $s_2(M,t) = s_0 \cos\left(2\pi f\left(t - \frac{S_2M}{c}\right)\right)$

8. D'après Fresnel : $s_{tot,m}^2 = 2s_0^2 + 2s_0^2 \cos\left(2\pi f \frac{\delta}{c}\right)$

$$s_{tot,m} = \sqrt{2}\, s_0 \sqrt{1 + \cos\left(2\pi f \frac{\delta}{c}\right)}$$

9. $\delta = S_2M - S_1M = \sqrt{D^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2} - \sqrt{D^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2}$

$$\simeq D\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{D}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{yb}{D^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{b}{4D}\right)^2 - 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{D}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{yb}{D^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{b}{4D}\right)^2\right)$$

$$\boxed{\delta \simeq \frac{yb}{D}}$$

10. Cette amplitude (donc le déphasage) dépend de la position y du micro.

11. $s_{tot,m} = 0$ (noeud) si $\cos\left(2\pi f \frac{yb}{cD}\right) = -1$

soit $2\pi f \frac{yb}{cD} = \pi + k\pi$ $\quad k \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow \boxed{y_k = \left(\frac{1}{2} + k\right)\lambda \frac{D}{b}}$

12. $i = y_{k+1} - y_k$: $\boxed{i = \frac{\lambda D}{b} = \frac{cD}{fb} = 77 \text{ cm}}$