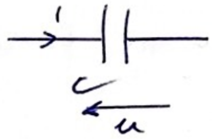
PCSI 1. 21-22

DS n°3.

I Les supercondensateurs :

1. En convention récepteur : $\boxed{i = C\dfrac{du}{dt}}$



et $\boxed{\mathcal{E}_{stockée} = \frac{1}{2} C u^2}$

2. – $\mathcal{E}_{tot} = P_{mot} \times \Delta t$ avec $\Delta t = \dfrac{400\,m}{4\,m\,s^{-1}} = 100\,s.$

donc $\boxed{\mathcal{E}_{tot} \simeq 5.10^7\ J.}$

– Cette énergie était stockée dans les $N=48$ condensateurs :

$\mathcal{E}_{tot} = N \times \frac{1}{2} C U^2$ d'où $\boxed{C = \dfrac{2.\mathcal{E}_{tot}}{N.U^2} \sim 4\ F.}$

R : c'est une capacité bcp plus importante que celle des condensateurs utilisés habituel^t ($\lesssim 10\,\mu F$).

– La recharge se fait sur quelques τ (à peu près 5τ) et dure $20\,s$ donc $\boxed{\tau \sim 4\,s}$

– Or pour un condensateur $\tau = RC$ d'où $\boxed{R = \frac{\tau}{C} \sim 1\,\Omega}$

3. On peut déterminer l'énergie massique d'un C :

$\boxed{\mathcal{E}_{massique} = \dfrac{\frac{1}{2} C U^2}{m} \simeq 7 \times 10^4\ J.kg^{-1}}$

et la puissance massique : $\boxed{P_{massique} = \dfrac{\frac{1}{2} C U^2}{20.m} \simeq 3,5.10^3\ W.kg^{-1}}$
(cette $\mathcal{E}$ est reçue en $20\,s$).

Les supercondensateurs stockent moins d'énergie par kg mais sont capables de se charger et de se décharger bcp + vite que les batteries. De plus leur durée de vie est bcp + longue (et il n'y a pas de risques d'explosion !)

4. La loi des mailles donne $E = u_c + Ri$

La caractéristique de C : $i = C\dot{u}_c$

D'où l'équation diff : $E = u_c + RC\dot{u}_c$

De la forme : $\boxed{\dot{u}_c + \frac{u_c}{RC} = \frac{E}{RC}}$ (H)

La forme canonique étant $\dot{u}_c + \frac{u_c}{\tau} = \frac{u_{c\infty}}{\tau}$

on obtient : $\boxed{\tau = RC \text{ et } u_{c\infty} = E}$. (H)

R : La valeur de $u_{c\infty}$ est cohérente avec le comportement de C (—/—) en régime établi stationnaire.

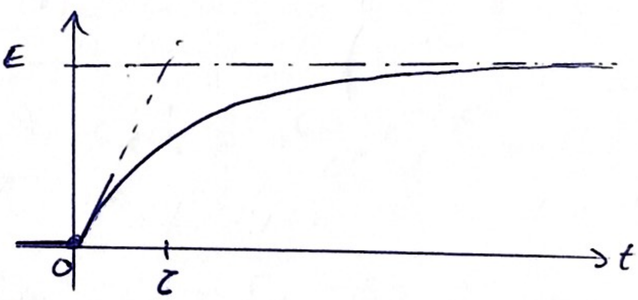
5. La solution est de la forme : $u_c(t) = Ae^{-t/\tau} + u_{c\infty}$

avec la CI $u_c(0) = 0$ on obtient : $u_{c_0} = 0 = A + u_{c\infty}$

D'où $A = -u_{c\infty}$: $\boxed{u_c(t) = E(1 - e^{-t/\tau})}$

$= -E$

D'où la courbe :



6. $\mathcal{E}_r(C) = \mathcal{E}_{stockée}(\infty) - \mathcal{E}_{stockée}(0)$

$\Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_r(C) = \frac{1}{2}CE^2}$ car $\mathcal{E}_{stockée}(0) = 0$.

7. $\mathcal{E}_f(E) = \int_0^\infty E\,i\,dt$ avec $i = C\dot{u}_c$ donc $\mathcal{E}_f(E) = \int_0^\infty CE\frac{du_c}{dt}dt$

finalement : $\mathcal{E}_f(E) = CE\,[u_c]_0^\infty = \boxed{CE^2 = \mathcal{E}_f(E)}$

8. $r_1 = \frac{\mathcal{E}_r(C)}{\mathcal{E}_f(E)} = \frac{1}{2}$. La charge se fait avec un rendement de 50% (∀ la valeur de R).

9. De m : $\boxed{u_c(t) = \frac{E}{2}(1 - e^{-t/\tau})}$ (on remplace simpl^t E par $\frac{E}{2}$)

10. À t_1 : $u_c(t_1) = 0{,}99\,\frac{E}{2} = \frac{E}{2}\left(1 - e^{-t_1/\tau}\right)$

d'où $e^{-t_1/\tau} = 0{,}01 \Rightarrow t_1 = -\tau \ln 0{,}01$

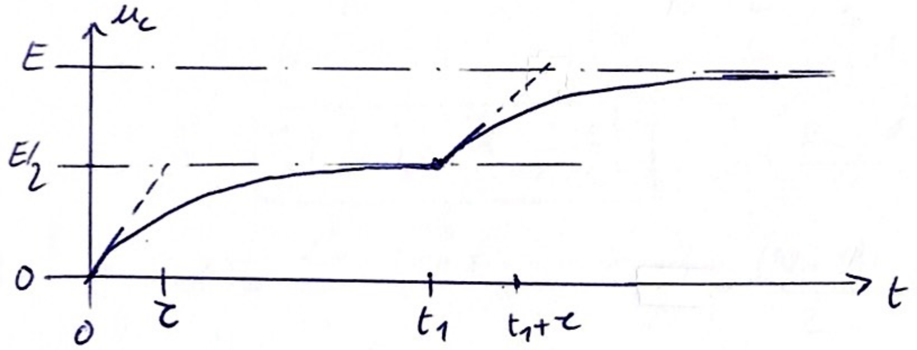
$$\boxed{t_1 = \tau \ln 100 = 4{,}6\,\tau.}$$

11. L'équation différentielle est $\dot{u}_c + \frac{u_c}{\tau} = \frac{E}{\tau}$

avec $u_c(t'=0) = \frac{E}{2}$. D'où $A + E = \frac{E}{2}$ et $A = -\frac{E}{2}$

$$\boxed{u_c(t') = E - \frac{E}{2} e^{-t'/\tau}}$$

12.



13. Pour $t \in [0; t_1]$: $\boxed{i_c(t) = C.\dot{u}_c = C\frac{E}{2\tau} e^{-t/\tau} = \frac{E}{2R} e^{-t/\tau}}$

Pour $\begin{cases} t > t_1 : \\ t' > 0 : \end{cases}$ $\boxed{i_c(t') = C\dot{u}_c = +\frac{CE}{2\tau} e^{-t'/\tau} = \frac{E}{2R} e^{-t'/\tau}}$

14. $\mathcal{E}_f\left(\frac{E}{2}\right) = \int_0^{t_1} \frac{E}{2} \cdot \underbrace{C\dot{u}_c}_{i}\, dt = C\frac{E}{2}\left[u_c\right]_0^{t_1} = C\left(\frac{E}{2}\right)^2 = C\frac{E^2}{4}.$

$\mathcal{E}_f(E) = \int_{t'=0}^{\infty} E.\,C\dot{u}_c\, dt' = CE\left[u_c\right]_{t'=0}^{\infty} = CE^2 - C\frac{E^2}{2} = C\frac{E^2}{2}$

$\mathcal{E}_f(tot) = CE^2\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} CE^2$

15. L'énergie totale reçue par C est toujours $\frac{1}{2} CE^2$

D'où $r_2 = \frac{\frac{1}{2} CE^2}{\frac{3}{4} CE^2} = \boxed{\frac{2}{3} = 67\% = r_2}$

$r_2 > r_1$: la charge en 2 étapes est plus longue (10τ au lieu de 5τ) mais le rendement est + élevé.

16. Même équation différentielle : $\boxed{\dot{u_c} + \frac{u_c}{\tau} = \frac{kE}{\tau N}}$

On pose $t' = t - t_{k-1}$

avec la CI $u_c(t_{k-1}) = (k-1)\frac{E}{N}$ on obtient $A + \frac{kE}{N} = (k-1)\frac{E}{N}$

$$\boxed{u_c(t') = k\frac{E}{N} - \frac{E}{N} e^{-t'/\tau}}$$

$$\left(\text{soit } u_c(t) = \frac{kE}{N} - \frac{E}{N} e^{-\frac{t - t_{k-1}}{\tau}} = \frac{E}{N}\left(k - e^{-\frac{t}{\tau}} \times e^{\frac{(k-1)t_1}{\tau}}\right)\right)$$

17. $$\mathcal{E}_f(E_k) = \int_{t'=0}^{t'=t_1} k\frac{E}{N} C \dot{u_c}\, dt = k\frac{E}{N} C \cdot \left[u_c\right]_{t_{k-1}}^{t_k} = kC\frac{E}{N}\left(k\frac{E}{N} - (k-1)\frac{E}{N}\right)$$

d'où $\boxed{\mathcal{E}_f(E_k) = k \cdot C\frac{E^2}{N^2}}$ $\left(\underline{\text{Rappel}} : e^{-\frac{t_1}{\tau}} = e^{-5} \simeq 0\right)$

18. $$\mathcal{E}_f(tot) = \sum_{k=1}^{N} kC\frac{E^2}{N^2} = C\frac{E^2}{N^2} \times \frac{(N+1)}{2} \cdot N = \boxed{\frac{1}{2}CE^2 \cdot \frac{N+1}{N} = \mathcal{E}_f(tot)}$$

19. D'où : $$r_N = \frac{\frac{1}{2}CE^2}{\frac{1}{2}CE^2 \frac{N+1}{N}} = \frac{N}{N+1}$$

Le rendement de charge en N étapes est $\boxed{r_N = \frac{N}{N+1}}$

Ce rendement tend vers 1 lorsque N augmente

($r_5 = 83\%$; $r_{10} = 91\%$; $r_{20} = 95\%$)

L'inconvénient est que la charge dure N fois plus longtemps car il faut atteindre N fois l'asymptote : $\boxed{\Delta t_{\text{charge } N} = 5N\tau = 5 \cdot N \cdot RC}$

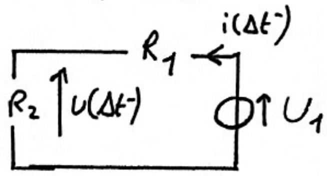
II Etude d'un régime transitoire

1. La tension aux bornes du condensateur est continue donc $u(0^-) = u(0^+) = 0$. C'est la CI brute.

L'équation qui relie i et u est la loi des mailles :

$\underbrace{e}_{U_1} = R_1 . i + u$. On en déduit que $\boxed{i(0^+) = \frac{U_1}{R_1}}$

2. Lorsque le régime permanent stationnaire est atteint, le circuit équivaut à



. Un diviseur de tension donne :

$$\boxed{u(\Delta t^-) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_1}$$

. Une loi de Pouillet donne : $\boxed{i(\Delta t^-) = \frac{U_1}{R_1 + R_2}}$ H

3. Ecrivons les lois du circuit pour $t \geq 0$:

. loi des mailles : ① $e = R_1 i + u$

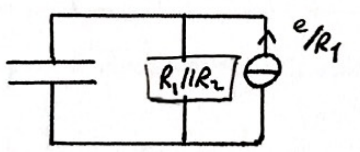
. loi des noeuds : ② $i = i_C + u/R_2$

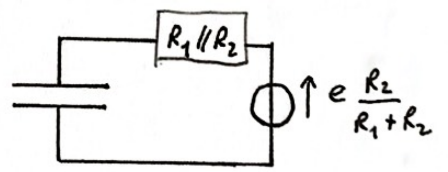
. caractéristique de C : ③ $i_C = C \dot{u}$

D'où $u = e - R_1 (C\dot{u} + u/R_2) \Rightarrow \boxed{\dot{u} + u\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)\frac{1}{R_1 C} = \frac{e}{R_1 C}}$ H

4. Forme canonique : $\dot{u} + \frac{u}{\tau} = \frac{u_\infty}{\tau}$ avec $\boxed{\tau = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C.}$ H

5. Passons le générateur en Norton et regroupons les résistances R_1 et R_2 qui sont alors en dérivation.

$\Rightarrow$ 

$\Rightarrow$ 

c'est finalement un circuit RC série dont le temps caractéristique est $\boxed{\tau = R_{équ} . C = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} . C.}$ H

6. On a : $u(t) = A e^{-t/\tau} + U_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2}$ (car $e(t) = U_1$ pour $t \in [0 ; \Delta t[$.

CI : $u(0) = A + U_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 0 \Rightarrow \boxed{u(t) = U_1 . \frac{R_2}{R_1 + R_2}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$

pour $t \in [0 ; \Delta t[$ H

C initialement déchargé.

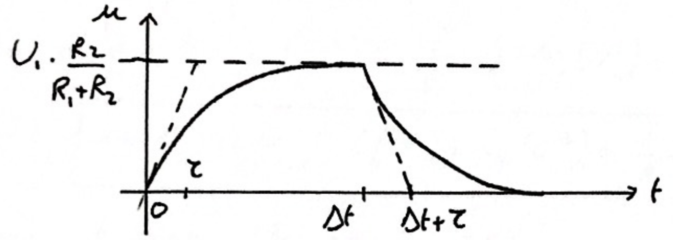
7. Pour $t \geqslant \Delta t$, on a $e(t) = 0$

Introduisons une nouvelle origine des temps : $t' = t - \Delta t$

On a donc $u(t') = A\, e^{-t'/\tau}$ et $u(t'=0) = A = U_1 \cdot \frac{R_2}{R_1+R_2}$.

Finalement pour $\left| \begin{array}{l} t' \geqslant 0 : \\ t \geqslant \Delta t \end{array} \right.$ $\boxed{u(t') = U_1 \cdot \frac{R_2}{R_1+R_2}\, e^{-t'/\tau}}$ (H) avec $\tau = \frac{R_1 R_2 C}{R_1+R_2}$

courbe :



8. ① donne $i = \frac{e-u}{R_1}$ donc pour $t \geqslant \Delta t$: $i = -\frac{u}{R_1}$

$i(t \geqslant \Delta t) = -\frac{U_1}{R_1+R_2} \cdot \frac{R_2}{R_1}\, e^{-t'/\tau} = \boxed{-\frac{U_1}{R_1+R_2} \cdot \frac{R_2}{R_1}\, e^{-\frac{t-\Delta t}{\tau}} = i(t \geqslant \Delta t)}$ (H)

et $\boxed{i(\Delta t^+) = i(t'=0^+) = \frac{-U_1}{R_1+R_2} \cdot \frac{R_2}{R_1}}$. (H)

9. On lit sur la courbe : $i(0^+) = +0{,}24\ mA$, $i(\Delta t^-) = +0{,}04\ mA$ et $i(\Delta t^+) = -0{,}20\ mA$

On en déduit : . $R_1 = \frac{U_1}{i(0^+)} = 20{,}83\ \Omega$ car $i(0^+) = \frac{U_1}{R_1}$

. $R_2 + R_1 = \frac{U_1}{i(\Delta t^-)} = 125\ \Omega$ car $i(\Delta t^-) = \frac{U_1}{R_1+R_2}$

$\Rightarrow \boxed{R_1 = 20{,}83\ \Omega \text{ et } R_2 \simeq 104\ \Omega}$ C'est cohérent avec $i(\Delta t^+) = \frac{-R_2}{R_1} \cdot \frac{U_1}{R_1+R_2} = -0{,}20\ mA$

10. On peut raisonnablement prendre $\boxed{p(i) = 0{,}01\ mA.}$ (épaisseur du trait)

. $\frac{u(R_1)}{R_1} = \frac{u(i_{0^+})}{i_{0^+}}$ (formule = cas simple "$Y = kX^n$" avec $n = -1$)

donc $u(R_1) = R_1 \cdot \frac{u(i_{0^+})}{i_{0^+}}$ avec $u(i_{0^+}) = \frac{p(i)}{\sqrt{3}} = 0{,}006\ mA$.

$\Rightarrow \boxed{u(R_1) = 0{,}5\ \Omega}$ $\boxed{R_1 = 20{,}8\ \Omega ;\ u(R_1) = 0{,}5\ \Omega.}$

R. le calcul de $u(R_2)$ n'est pas un cas simple : il faut utiliser GUM-MC ou python.

III. Circuit RLC parallèle.

1. Pour $t<0$: interrupteur ouvert : $\boxed{i=0}$; $C \Leftrightarrow$ donc $\boxed{i_2=0}$
$L \Leftrightarrow$ fil donc R court-circuitée : $\boxed{u=0 \text{ et } i_3=0}$; $\boxed{i_2=i-i_1-i_3=0}$

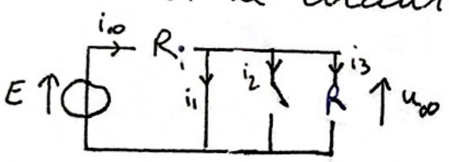
2. Les CI brutes sont $i_1(0^-)=i_1(0^+)=0$ et $u(0^-)=u(0^+)=0$.
Il reste à trouver i, i_2 et i_3. Ecrivons les équations du circuit : $i=i_1+i_2+i_3$ avec $i_3=\frac{u}{R}$, $i_2=C\dot{u}$ et $u=L\frac{di_1}{dt}$

$$E=R_i i+u$$

On en déduit : $i(0^+)=\frac{E}{R_i}$, $i_3(0^+)=0$, $i_2(0^+)=i(0^+)=\frac{E}{R_i}$.

Bilan $\boxed{u(0^+)=0,\ i(0^+)=i_2(0^+)=\frac{E}{R_i} \text{ et } i_1(0^+)=i_3(0^+)=0}$

3. Lorsque $t\to\infty$, le régime permanent stationnaire est établi atteint et le circuit est équivalent à :



$$\boxed{\begin{array}{ll} i_\infty=i_{1\infty}=\frac{E}{R_i} & u_\infty=0 \\ i_{2\infty}=i_{3\infty}=0 & \end{array}}$$

4. A partir des équations de la question 2, on peut en déduire :

$$\frac{di}{dt}=\frac{di_1}{dt}+\frac{di_2}{dt}+\frac{di_3}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{E-u}{R_i}\right)=\frac{u}{L}+C\ddot{u}+\frac{\dot{u}}{R}$$

avec $i_3=\frac{u}{R}$ on obtient $\boxed{RC\frac{d^2i_3}{dt^2}+\frac{di_3}{dt}\left(1+\frac{R}{R_i}\right)+\frac{R}{L}i_3=0}$

La forme canonique est $\ddot{x}+\frac{\omega_0}{Q}\dot{x}+\omega_0^2x=0$ (H)

avec $\boxed{\omega_0^2=\frac{1}{LC}}$ et $\frac{\omega_0}{Q}=\left(1+\frac{R}{R_i}\right)\frac{1}{RC} \Rightarrow \boxed{Q=\sqrt{\frac{C}{L}}\times\frac{RR_i}{R+R_i}}$ (H)

5. Le régime est pseudo périodique si $Q>\frac{1}{2}$ ($\Delta'<0$)
Il faut donc que $\boxed{\sqrt{\frac{C}{L}}\cdot\frac{R.R_i}{R+R_i}>\frac{1}{2}}$.

D'où $\boxed{L<4C\frac{R^2R_i^2}{(R+R_i)^2}=2{,}8\,H.}$ C'est énorme !
On aura très certainement un régime pseudo périodiq

6. $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 7{,}07.\ 10^3\ rad.s^{-1} \Rightarrow f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 1{,}12\ kHz$

avec $\frac{u(\omega_0)}{\omega_0} = \sqrt{\left(\frac{u(L)}{2L}\right)^2 + \left(\frac{u(C)}{2C}\right)^2}$ (cas simple du monôme)

$= 1{,}8\ \%$ en effet $\frac{u(L)}{L} = \frac{u(C)}{C} = 0{,}05/\sqrt{3}$

Donc $u(\omega_0) \simeq 0{,}13.10^3\ rad.s^{-1}$ et $u(f_0)/f_0 = \frac{u(\omega_0)}{\omega_0} = 1{,}8\ \%$:

$\boxed{\begin{array}{l} \omega_0 = 7{,}07.10^3\ rad.s^{-1}\ ;\ u(\omega_0) = 0{,}13.10^3\ rad.s^{-1} \\ f_0 = 1{,}12\ kHz\ ;\ u(f) = 0{,}02\ kHz \end{array}}$ $\rightarrow u(f_0) = 0{,}02\ kHz$

7. $\boxed{Q = 5{,}9.}$ Le calcul de $u(Q)$ nécessite GUM_MC en Python.

8. l'équation caractéristique associée est $r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$

D'où $r_{1/2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\sqrt{-\Delta'}$ avec $\Delta' = \left(\frac{\omega_0}{2Q}\right)^2 - \omega_0^2$

$\Omega = |Im(r_{1/2})| = \sqrt{-\Delta'} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = \frac{2\pi}{T}$

D'où $\boxed{\begin{array}{l} \Omega = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}} = 7{,}04\times10^3\ rad.s^{-1} \\ T = \frac{2\pi}{\Omega} = 0{,}89\ ms. \end{array}}$ $u(\Omega) \simeq u(\omega_0)$

Le z-score donne : $z = \frac{|\Omega - \omega_0|}{\sqrt{u^2(\Omega) + u^2(\omega_0)}} = 0{,}16 < 2$. On a donc $\boxed{\Omega \simeq \omega_0}$

9. $\frac{di_3}{dt}(0) = \frac{u(0)}{R} = \frac{i_2(0)}{RC} = \boxed{\frac{E}{RR_iC} = \frac{di_3}{dt}(0)}$ avec les équations de la question 2.

10. $i_3(t) = e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}.(A\cos\Omega t + B\sin\Omega t)$ pour $t \geq 0$.

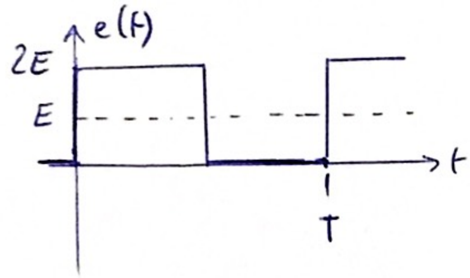
avec $\Omega \simeq \omega_0$ et $\begin{cases} i_3(0) = 0 = A \\ \frac{di_3}{dt}(0) = \frac{E}{RR_iC} = -\frac{\omega_0}{2Q}A + B\omega_0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} A = 0 \\ B = \frac{E}{RR_iC\omega_0} \end{array}}$

$\boxed{i_3(t) = \frac{E}{RR_iC\omega_0} e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \sin\omega_0 t}$. 11. $\boxed{\tau = \frac{2Q}{\omega_0} = 1{,}7\ ms.}$

12. $\frac{di_3}{dt} = 0$ pour $-\frac{\omega_0}{2Q}\sin(\omega_0 t) + \omega_0\cos(\omega_0 t) = 0$

donc pour $\tan(\omega_0 t) = 2Q \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \omega_0 t_0 = 85° = 1{,}5\ rad \\ t_0 = 0{,}21\ ms. \end{array}}$

13. $e(t) = E \oplus$ créneau entre $-E$ et E



14. Pour atteindre le régime établi il faut quelques τ (q.11)

donc $\frac{T}{2}$ doit être supérieure à 5τ : $\frac{T}{2} > 5\tau$

donc $\boxed{f < \frac{1}{10\tau} = 60 \text{ Hz}.}$

15. On mesure $\boxed{T = \frac{5{,}3 \text{ ms}}{6} = 0{,}88 \text{ ms}}$ et $\boxed{\delta = \frac{1}{4} \ln \frac{17}{2} = 0{,}54}$

16. $u_R = R i_3 = \frac{E}{R_1 C \omega_0} e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \sin \omega_0 t$ donc $\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{e^{-\omega_0 t/2Q} \sin \omega_0 t}{e^{-\omega_0(t+nT)/2Q} \sin(\omega_0(t+nT))}$

$n\omega_0 T \simeq n 2\pi$ car $\omega_0 = \Omega$. donc $\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{1}{e^{-n2\pi/2Q}} = \pi/Q$

On en déduit $\boxed{Q = \frac{\pi}{\delta} = 5{,}8}$

C'est cohérent avec la valeur théorique précédente.

17. $\boxed{\mathcal{E}_r(L) = \mathcal{E}_{stockée}(\infty) - \mathcal{E}_{stockée}(0) = \frac{1}{2} L \frac{E^2}{R_1^2}}$ car $i_1(\infty) = E/R_1$.

18. $\boxed{\mathcal{E}_r(C) = \mathcal{E}_{stockée}(\infty) - \mathcal{E}_{stockée}(0) = 0}$ car $u(\infty) = u(0) = 0$.

19. $\mathcal{E}_J(R) = \int_{t=0}^{\infty} R i_3^2 \, dt = \int_{t=0}^{\infty} \frac{E^2}{R R_1^2 C^2 \omega_0^2} e^{-\frac{\omega_0 t}{Q}} \sin^2(\omega_0 t) \, dt$.

le calcul est un peu long !

Le bilan d'énergie ne nous aide pas trop car il faut calculer $\mathcal{E}_f(\text{géné}) = \int_0^{\infty} E \, i(t) \, dt$ avec $i(t) = i_3 + i_1 + i_2$

et les expressions ne sont pas simples !