

Samedi 24 septembre 2022

# DEVOIR SURVEILLE N°1

## PHYSIQUE

### I. Analyse dimensionnelle en mécanique des fluides :

On cherche à déterminer la force de la résistance à l'avancement d'un objet en déplacement dans un fluide en supposant qu'elle peut s'écrire sous la forme d'un monôme des grandeurs pertinentes du problème.

Cette force, appelée force de trainée, est de sens opposé à la vitesse de l'objet par rapport au fluide supposé globalement au repos dans le référentiel d'étude.

On admet que, pour les expériences considérées, les paramètres pertinents sont  $\rho$  (la masse volumique du fluide),  $v$  (la vitesse de l'objet par rapport au fluide) et  $S$  (la section = surface de front de l'objet).

1. Déterminer l'expression de la force de trainée :

$$F = \alpha \rho^a \cdot v^b \cdot S^c$$

où  $\alpha$  est un facteur numérique sans dimension.

2. On considère une voiture se déplaçant sur une autoroute. Déterminer le quotient des forces de trainée  $F_1/F_2$  puis des puissances  $P_1/P_2$ , l'indice 1 se rapportant au cas où la voiture se déplace à  $130 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$  tandis que l'indice 2 se rapporte au cas où celle-ci se déplace à  $110 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ . On rappelle que la puissance s'écrit comme le produit de la force par la vitesse de déplacement.

Les écologistes proposent de réduire la vitesse maximale sur autoroute de  $130 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$  à  $110 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ . Calculer le pourcentage d'économie que cela représente en terme de consommation de carburant (qui est proportionnelle à la puissance mise en jeu pour vaincre les frottements de l'air).



## II. Oscillateur harmonique : étude d'un fil d'araignée (d'après Mines-Pont 2022) :

Les araignées ou Aranéides sont des prédateurs invertébrés arthropodes. À ce jour, plus de 47 000 espèces subdivisées en 117 familles sont répertoriées et 1700 d'entre elles vivent en France.

Les araignées produisent des fils de soie constitués d'un entrelacement de nombreuses fibrilles élémentaires. Le diamètre de ces fils varie typiquement de 1 jusqu'à 70  $\mu\text{m}$ .

À diamètre équivalent, ces fils sont plus résistants que l'acier et possèdent de nombreuses autres propriétés qui les rendent intéressants pour l'industrie, pour la confection par exemple de nouveaux textiles, de gilets pare-balles ou encore de cordes d'instruments de musique. Dans la nature, l'usage que les araignées en font est multiple et dépend des espèces considérées : fil de sécurité pendant un saut pour fuir ou pour se déplacer (fil d'Ariane), tissage de toile pour piéger des proies, moyen de s'élever dans les airs et de voyager au gré des courants aériens pour les araignées montgolifières (fil de la Vierge), confection de catapultes pour la chasse, création de dômes pour le stockage d'air sous l'eau douce pour les espèces subaquatiques, ...

Nous allons étudier dans cette partie les propriétés mécaniques des fils d'araignée.

L'élongation relative d'un fil de soie de longueur initiale  $\ell_0$  de section  $S_0$  [ $S_0$  = surface] soumis à une force de traction d'intensité  $F$  est donnée, dans la zone des faibles élongations, par la loi suivante :

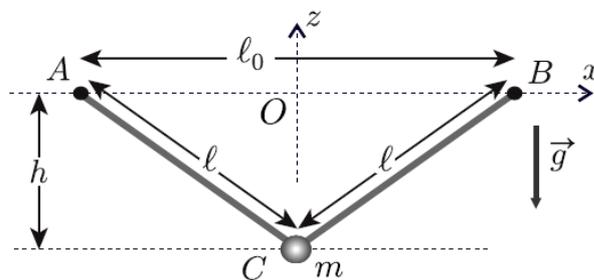
$$\frac{(\ell - \ell_0)}{\ell_0} = \frac{1}{E} \frac{F}{S_0}$$

où  $E$  est le module de Young du matériau constituant le fil.

1. Quelle est la dimension de  $E$  ?
2. Montrer que, pour les faibles élongations, le comportement mécanique du fil peut être assimilé à celui d'un ressort de constante de raideur  $k$  que l'on exprimera en fonction des données du problème.

Pour mesurer le module de Young  $E$  d'un fil d'araignée, on procède à une expérience simple.

Le fil de longueur  $\ell_0$  est attaché en deux points fixes  $A$  et  $B$  distants de  $\ell_0$  et situés sur une même horizontale. Une masse  $m$  est suspendue au point  $C$  milieu du fil. Sous l'effet du poids de cette masse, le fil adopte à l'équilibre une forme en V, dans laquelle les deux segments formant le fil ont la même longueur  $\ell$ .



On mesure alors la hauteur  $h$  dont le milieu du fil s'est déplacé par rapport à l'horizontale.

Cette configuration d'équilibre est représentée sur la figure ci-dessus.

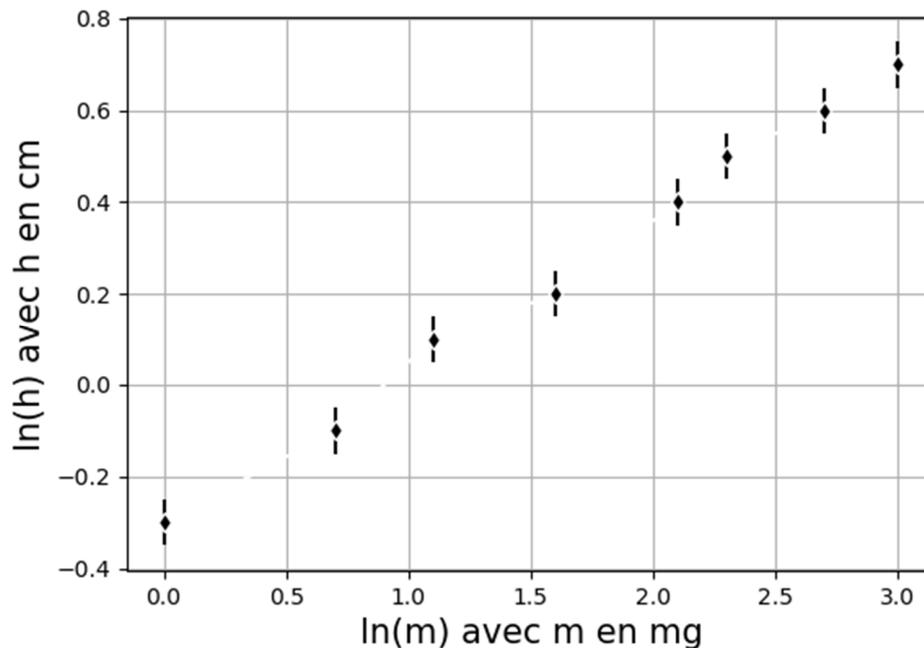
3. Vérifier que la formule suivante qui donne  $h$  en fonction des paramètres du problème est homogène :

$$h^3 = \frac{mg}{4k} \times \ell_0^2$$

La figure ci-dessous reproduit les résultats de cette expérience réalisée avec un fil de longueur  $\ell_0 = 5$  cm de rayon  $a = 5$   $\mu\text{m}$  et différentes masses  $m$  suspendues.

Pour se ramener au tracé d'une droite (et pouvoir faire une régression linéaire), on trace  $\ln(h)$  en fonction de  $\ln(m)$  où  $h$  est exprimée en cm et  $m$  en mg en faisant figurer les incertitudes de mesure.

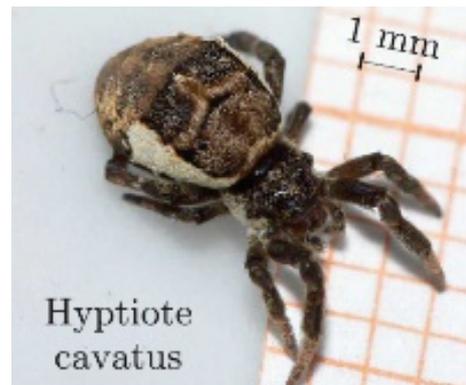
[Remarque : cela revient à dire que l'on trace  $\ln(h/h_0)$  en fonction de  $\ln(m/m_0)$  où  $h_0 = 1$  cm et  $m_0 = 1$  mg].

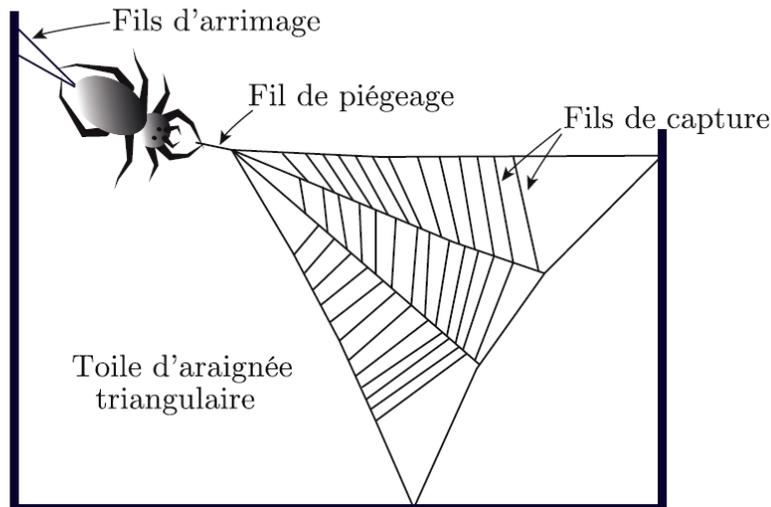


4. Peut-on conclure que les points expérimentaux sont alignés ?
5. Quelle est le coefficient directeur de la droite tracée ? Est-il en accord avec celui que l'on doit obtenir si la formule  $h^3 = \frac{mg}{4k} \times \ell_0^2$  est vérifiée ?
6. En relevant l'ordonnée à l'origine, déterminer la valeur numérique de la constante de raideur  $k$  du ressort équivalent au fil ; en déduire une estimation de la valeur numérique du module de Young  $E$  du fil d'araignée. On prendra  $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$ .

L'araignée *Hyptiote cavatus*, qui possède une masse d'environ 7 mg, utilise ses muscles pour enrouler l'un des fils afin de tendre la toile, comme on utilise son bras pour tendre la corde d'un arc. Elle garde alors cette position jusqu'à ce qu'une proie entre en contact avec la toile. Quand elle relâche la tension, la toile subit alors une très forte accélération puis s'emmêle autour de l'insecte proie, ce qui marque le début du processus de capture.

La vitesse de l'araignée qui reste accrochée à la toile atteint alors une valeur maximale d'environ  $v_{\text{max}} = 3 \text{ m.s}^{-1}$  en ayant subi une accélération maximale prodigieuse  $a_{\text{max}} = 800 \text{ m.s}^{-2}$ .





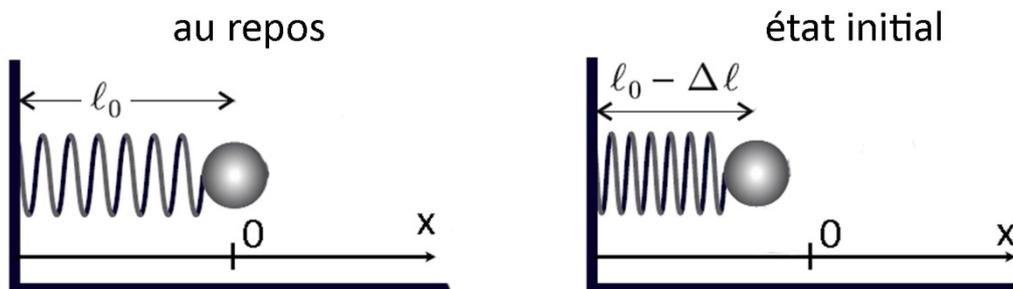
Nous allons étudier différents modèles de ce processus de capture.

### 1<sup>er</sup> modèle avec un seul ressort :

On modélise l'ensemble de la toile par un ressort de constante de raideur  $k$  accroché à un point fixe et l'araignée est assimilée à une petite sphère de masse  $m$  accrochée à l'autre extrémité du ressort. L'axe des  $x$  est horizontal et son origine est prise au niveau de la position de repos.

Le poids de l'araignée est négligé [mais pas sa masse] et il n'y a pas de contact avec le sol.

Le ressort est initialement comprimé par l'araignée et lâché sans vitesse au moment où un insecte touche la toile.



Initialement la longueur du ressort est  $l_0 - \Delta l$ .

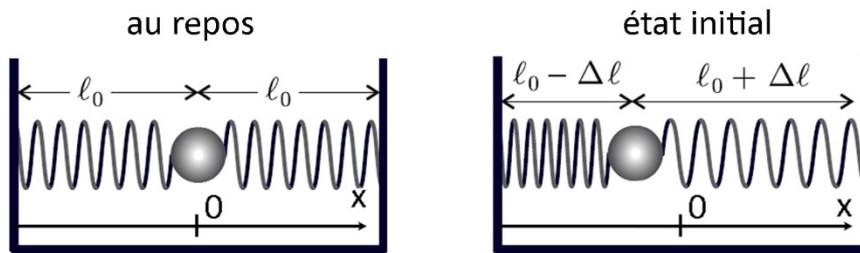
7. Après avoir exprimé la longueur de du ressort en fonction de  $l_0$  et de  $x$ , établir l'équation différentielle vérifiée par la position  $x$  de l'araignée. [Attention à la rédaction !].
8. Résoudre cette équation en introduisant une pulsation  $\omega_0$ .
9. Quelle est l'amplitude des oscillations ? et leur phase à l'origine ?
10. Tracer l'allure de  $x(t)$ .
11. La période des oscillations dépend-elle de l'amplitude des oscillations ? [Commenter !].
12. Etablir l'expression de  $v(t)$  où  $v$  est la vitesse de l'araignée. [ $v(t) = \dot{x}(t)$ ].
13. Déterminer l'expression littérale de la valeur maximale  $v_{\max}$  de la vitesse au cours du mouvement en fonction des paramètres.

14. De même, établir l'expression littérale de l'accélération de l'araignée au cours du temps et en déduire sa valeur maximale  $a_{\max}$  en fonction des données.

15. A l'aide des expressions précédentes et des valeurs numériques de l'énoncé en déduire les valeurs numériques de  $\Delta\ell$  et de  $k$ . [Attention l'A.N. est très différente de celle de la partie 1 : ce n'est pas la même espèce d'araignée qui est étudiée].

**2<sup>ème</sup> modèle avec deux ressorts :**

Dans ce deuxième modèle, la toile est modélisée par deux ressorts identiques ( $k'$ ,  $\ell_0$ ) fixés sur des supports distants de  $2\ell_0$ . L'araignée est accrochée aux deux ressorts et impose une contraction initiale  $\Delta\ell$  du ressort de gauche :

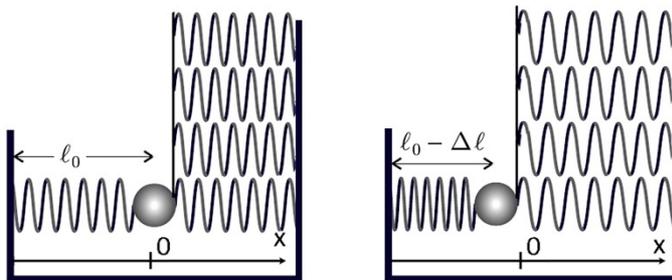


16. Reprendre les étapes utiles des questions précédentes et en déduire les expressions de  $v_{\max}$  et  $a_{\max}$  en fonction des données.

17. En déduire les valeurs numériques de  $\Delta\ell$  et de  $k'$  dans le cadre de ce modèle.

**3<sup>ème</sup> modèle avec N+1 ressorts :**

Dans ce dernier modèle, l'ensemble des fils qui forment la toile est modélisé par  $N$  ressorts identiques ( $k''$ ,  $\ell_0$ ) à droite de l'araignée. Le fil d'arrimage est également représenté par un ressort ( $k''$ ,  $\ell_0$ ) à gauche de l'araignée ( $N = 4$  sur la figure ci-dessous).



18. En déduire les expressions de  $\Delta\ell$  et de  $k''$  dans le cadre de ce modèle. [Soyez efficaces dans la rédaction et ne refaites pas tout le problème !]

**Retour sur les incertitudes de mesures**

Voici le tableau des 9 mesures de  $h$  (en cm) obtenues à l'expérience de la question 4 pour une masse de  $m = 4$  mg.

1,16	1,20	1,18	1,18	1,13	1,15	1,14	1,15	1,16
------	------	------	------	------	------	------	------	------

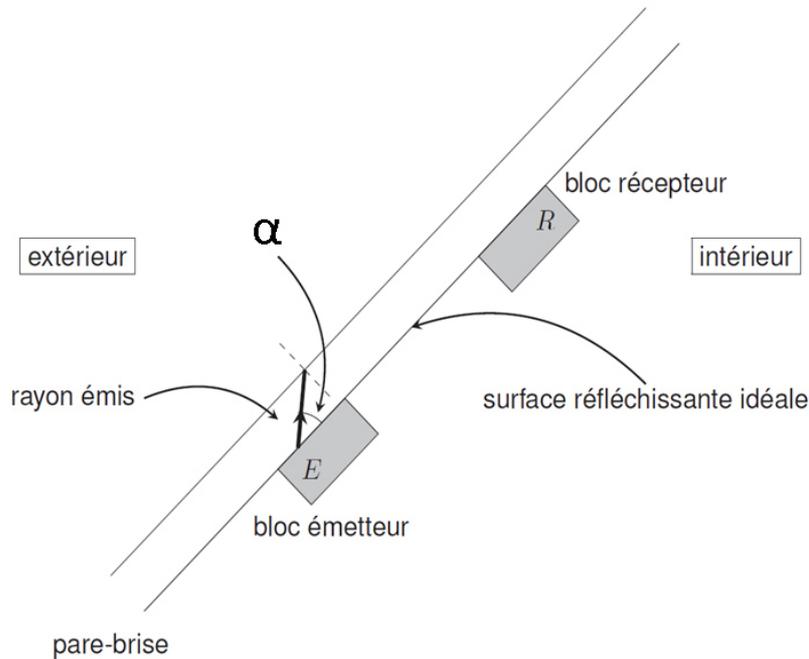
19. En déduire la valeur de la mesure de  $h$  et son incertitude-type  $u(h)$ . Ecrire le résultat final correctement.

### III. Optique géométrique : détecteur de pluie (d'après E3A MP 2018) :

La première voiture française à avoir été vendue équipée d'un détecteur de pluie en série est la Peugeot 406 en 1997. On recense essentiellement deux technologies de détection de pluie :

- le capteur électro-optique, qui repose sur un phénomène de réflexion totale ;
- le capteur capacitif qui repose sur la variation de la capacité d'un condensateur.

Dans ce problème, nous nous intéresserons à la technologie électro-optique. Le capteur contient un émetteur  $E$  d'impulsion lumineuse et un récepteur  $R$ . Le récepteur reçoit le signal après quelques réflexions. L'intensité lumineuse reçue dépend du nombre de réflexions et de la géométrie du capteur mais aussi de la présence ou non d'eau à l'extérieur du pare-brise.



L'émetteur est une diode qui produit un rayon lumineux de longueur d'onde dans le vide  $\lambda_0 = 700 \text{ nm}$

On donne l'indice optique de l'eau à la longueur d'onde utilisée :  $n_{\text{eau}} = 1,33$  et celui du verre du pare-brise :  $n_{\text{PB}} = 1,50$ .

1. Quelle est la longueur d'onde du rayon lumineux dans le verre du pare-brise ? dans l'eau ?
2. Etablir l'expression de l'angle d'incidence limite qui conduit à une réflexion totale dans le cas d'une interface verre/air ( $i_{\text{lim VA}}$ ) puis d'une interface verre/eau ( $i_{\text{lim VE}}$ ). Faire les A.N.
3. En vous appuyant sur deux schémas, expliquer comment évolue l'intensité lumineuse perçue par le récepteur selon la présence ou l'absence d'eau sur le pare-brise et justifier le choix d'un angle  $\alpha = 40^\circ$  tel que défini sur le schéma précédent. [Question demandant une justification claire].

Le rayon incident pénètre dans le pare-brise avec l'angle  $\alpha = 40^\circ$  défini précédemment. La distance entre l'émetteur et le récepteur (considérés ponctuels) est  $ER = 20 \text{ cm}$ . L'épaisseur du pare-brise est  $e = 3 \text{ mm}$ .

4. Exprimer puis calculer le nombre de réflexions sur la face externe du pare-brise. Justifier l'intérêt d'un grand nombre de réflexions.

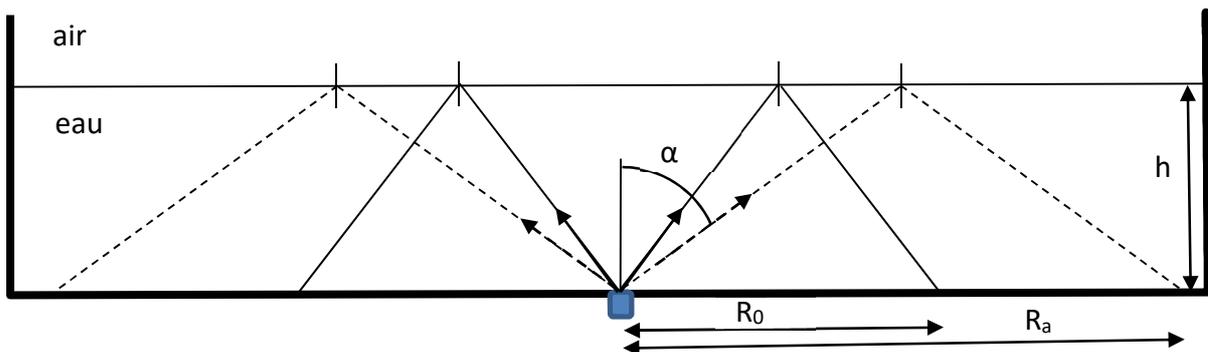
#### IV. Optique géométrique : éclairage d'un bassin (d'après G2E 2017) :

Une lampe étanche est posée au fond d'un bassin contenant une épaisseur  $h$  d'eau. Elle éclaire vers le haut avec un angle d'ouverture totale  $2\alpha$  égal à  $120^\circ$ . On constate que, vu de l'extérieur, l'éclairage du bassin se matérialise par un disque lumineux doublé d'un anneau lumineux concentrique au fond du bassin.

On note  $i_{RT}$  l'angle limite de réflexion totale pour un rayon lumineux se propageant de l'eau vers l'air.

En fournissant des explications claires [et concises], déterminer :

1. le rayon  $R_0$  du disque lumineux. L'exprimer en fonction de  $n_{\text{eau}}$  et de l'épaisseur  $h$ .
2. laquelle des deux structures (disque ou anneau) est-elle la plus lumineuse ?
3. le rayon externe  $R_a$  de l'anneau.



## RAPPELS SUR LES INCERTITUDES

### Écriture d'un résultat avec incertitude :

$$X = x \pm u(X) \text{ (la grandeur après le symbole } \pm \text{ est une incertitude\_type)}$$

ou

$$X = x ; u(X)$$

Attention à la cohérence des **chiffres significatifs** et à ne pas oublier **l'unité**.

### Incertitude-type de type A (répétition N fois de la mesure) :

Le menu STAT de la calculatrice donne la moyenne  $\langle x \rangle$  et l'écart-type  $S_x$  des N mesures.

Un point est aberrant s'il n'est pas dans l'intervalle  $[\langle x \rangle - 2S_x ; \langle x \rangle + 2S_x]$ .

L'incertitude-type de la mesure est donnée par :  $u_A = S_x / \sqrt{N}$ .

### Incertitude-type de type B (mesure unique) :

On détermine le **demi-intervalle** acceptable pour la mesure, noté  $a$  :

- pour une lecture sur une **échelle graduée** (règle, thermomètre gradué, palmer...) :

$$a = 1/2 \text{ graduation}$$

- pour un **appareil de mesure** à affichage digital (voltmètre, thermomètre électronique, ...) :

$a$  est appelé **précision** et est donné par la **notice**

- pour un **composant** (résistances, condensateurs, bobines, ...) :

$a$  est appelé **tolérance** et est donné par le **fabricant**

- pour une **évaluation directe par l'utilisateur** entre  $x_1$  et  $x_2$  :

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ et le demi - intervalle } a = \frac{x_2 - x_1}{2}$$

Si la mesure est à **lecture double** :  $a$  est multiplié par  $\sqrt{2}$

L'incertitude-type de la mesure est donnée par :  $u_B = a / \sqrt{3}$

### Comparaison d'une mesure : $x_1 ; u(x_1)$

avec une <b>valeur de référence</b> $x_{ref}$	avec une <b>autre mesure</b> : $x_2 ; u(x_2)$
On détermine l' <b>écart normalisé</b> ou <b>z-score</b> :	
$z = \frac{ x_1 - x_{ref} }{u(x_1)}$	$z = \frac{ x_1 - x_2 }{\sqrt{u(x_1)^2 + u(x_2)^2}}$
<p><b>Si <math>z &lt; 2</math></b>, on considère qu'il y a <b>compatibilité</b></p> <p><b>Si <math>z \geq 2</math></b>, on considère qu'il y a <b>incompatibilité</b> et il faut <b>chercher la cause</b>.</p>	