PCSI 1 22-23

DS n° 1.

I Analyse dimensionnelle :

1. $[\rho] = M.L^{-3}$; $[v] = L.T^{-1}$; $[S] = L^2$; $[F] = MLT^{-2}$

donc il faut résoudre : $MLT^{-2} = M^a L^{-3a} L^b T^{-b} L^{2c}$

soit : $\begin{cases} 1 = a \\ 1 = -3a + b + 2c \\ -2 = -b \end{cases}$ d'où $a = 1$; $b = 2$ et $c = 1$

$$\boxed{F = \alpha . \rho . S . v^2}$$

2. Pour une voiture donnée, le passage de 130 km h⁻¹ à 110 km.h⁻¹ conduit à une réduction de la force de traînée proportionnellement à v^2 :

$$F_{130} = K.(130)^2 \; ; \; F_{110} = K.(110)^2 \Rightarrow \frac{F_{110}}{F_{130}} = \left(\frac{110}{130}\right)^2 = 0,7.$$

La réduction de la vitesse maximale sur autoroute à 110 km h⁻¹ permet une diminution des frottements de 30%.

[La puissance ($P = F.v$) diminue en v^3 soit 40%.
La consommation de carburant est proportionnelle à la puissance des frot^t : 40% de consommation instantanée en moins !)
Mais attention : il faut rouler plus longtemps si on roule moins vite $\Rightarrow$ la consommation totale évolue en v^2 (v^3 pour la puissance et $\frac{1}{v}$ pour le temps de trajet avec conso_tot prop. à $P \times \Delta t$).
Pour sauver la ~~planète~~ l'humanité il faut baisser v_{Max} sur autoroute !]

II. Oscillateur harmonique : fil d'araignée

1. L'analyse dimensionnelle donne $\left[\frac{L}{L}\right] = \left[\frac{F}{S}\right] \cdot \frac{1}{[E]}$

   D'où $[E] = \frac{M L T^{-2}}{L^2} = \boxed{M L^{-1} . T^{-2} = [E]}$

2. . La loi de Hooke s'écrit : $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}$

   donc $\|\vec{F}\| = k(l - l_0)$: la force est proportionnelle à $l - l_0$

   . Ici $F = \frac{E S_0}{l_0}(l - l_0)$: — — — — — —

   . C'est donc équivalent à un ressort avec $\boxed{k = \frac{E . S_0}{l_0}}$

3. Vérifions que $\left[\frac{mg}{4k} l_0^2\right] = L^3$: $[mg] =$ force

   $[k] =$ force / longueur

   D'où $L^3 = \frac{\text{force} . L^2}{\text{force} . L^{-1}} = L^3$: <u>c'est homogène</u>

4. Il est possible de tracer une droite passant par tous les segments. La conclusion est :

   . à <u>la précision des mesures près</u>, les points sont alignés

   ou . une loi affine entre $\ln(h)$ et $\ln(m)$ <u>est compatible</u> avec les mesures et <u>leurs incertitudes</u>.

5. Si h^3 est proportionnel à m alors $h^3 = Cte \times m$

   et $3\ln(h) = \ln(Cte) + \ln(m)$. $\Rightarrow$ $\underline{\underline{\ln(h) = cte + \frac{1}{3}\ln(m)}}$

   La loi est vérifiée si le <u>coefficient directeur</u> de la droite précédente est $\underline{\frac{1}{3}}$.

   On mesure en prenant 2 points : $coeff \simeq \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{0{,}7+0{,}3}{3-0} \simeq \frac{1}{3}$.

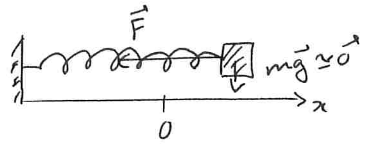
   Il y a donc <u>compatibilité</u>.

6. $h^3 = \frac{m g l_0^2}{4k}$ donc $\ln(h) = \frac{1}{3}\ln(m) + \frac{1}{3}\ln\left(\frac{g l_0^2}{4k}\right)$

   On relève l'abscisse à l'origine : $-0{,}3 = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{g l_0^2}{4k}\right)$ d'où $\boxed{k = \frac{g l_0^2}{4 e^{-0{,}9}}}$

   A.N : $\boxed{k \simeq 0{,}015 \, N.m^{-1}}$ et $\boxed{E = \frac{k l_0}{S_0} = 9{,}6 . 10^6 \, kg.m^{-1}.s^{-2}}$ $(S_0 = \pi a^2)$

7. Système : araignée



Réf : terrestre considéré galiléen

Forces : $m\vec{g}$: négligé et $\vec{F} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}$

$= -k\,x\,\vec{e_x}$

2ème loi de Newton : $m\vec{a} = -k\,x\,\vec{e_x}$

Projection selon $\vec{e_x}$: $m\ddot{x} = -kx \Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0}$

8. Résolution : posons $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

$\Rightarrow x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$ (ici $x_{éq} = 0$)

et $\dot{x}(t) = -\omega_0 A\sin\omega_0 t + \omega_0 B\cos\omega_0 t$

Les CI donnent $\begin{cases} x(t=0) = -\Delta\ell = A \\ \dot{x}(t=0) = 0 = \omega_0 B \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A = -\Delta\ell \\ B = 0 \end{matrix}$

D'où $\boxed{x(t) = -\Delta\ell\cos\omega_0 t}$ H avec $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$ H

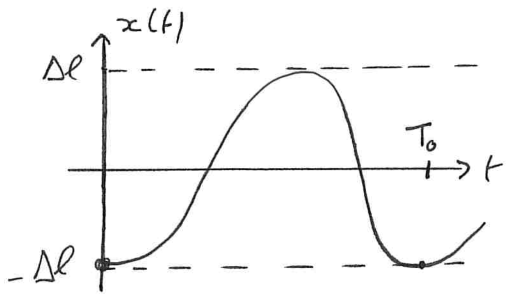
9. La forme générale des oscillations sinusoïdales est

$x(t) = x_m\cos(\omega t + \varphi) + x_{éq}$ avec $x_m > 0$

Il faut donc réécrire $x(t)$ sous la forme :

$\underline{x(t) = \Delta\ell\cos(\omega_0 t + \pi)}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{matrix}\text{amplitude} : x_m = \Delta\ell \\ \text{phase à l'origine} : \varphi = \pi\end{matrix}}$

10.



11. $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$: T_0 est indépendante de l'amplitude des osc. (donc des CI). C'est la propriété d' $\boxed{\text{ISOCHRONISME}}$ de l'osc. harmonique.

12. $\boxed{v(t) = \dot{x}(t) = +\Delta\ell\cdot\omega_0\sin(\omega_0 t)}$ H

13. $\boxed{v_{max} = \Delta\ell\cdot\sqrt{\frac{k}{m}}}$ lorsque $\sin(\omega_0 t) = 1$.

14. $a(t) = \dfrac{dv}{dt} = \ddot{x}(t) = \omega_0^2 \Delta\ell \cdot \cos(\omega_0 t)$

$\boxed{a_{max} = \omega_0^2 \Delta\ell = \dfrac{k}{m} \cdot \Delta\ell}$ pour $\cos(\omega_0 t) = 1$.

15. $\begin{cases} v_{max} = \Delta\ell \sqrt{\dfrac{k}{m}} \\ a_{max} = \Delta\ell \cdot \dfrac{k}{m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{max}^2 = \Delta\ell^2 \cdot \dfrac{k}{m} \\ a_{max} = \Delta\ell \cdot \dfrac{k}{m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta\ell = \dfrac{v_{max}^2}{a_{max}} \\ k = \dfrac{m a_{max}}{\Delta\ell} \end{cases}$

Finalement : $\boxed{\Delta\ell = \dfrac{v_{max}^2}{a_{max}} = 1{,}1 \text{ cm}.}$ et $\boxed{k = m \cdot \dfrac{a_{max}^2}{v_{max}^2} = 0{,}50 \text{ N.m}^{-1}}$

16. Système : araignée

Ref : terrestre considéré galiléen

Forces : $m\vec{g}$ négligé ; $\vec{F_1} = -k' x \, \vec{e_x}$

$\vec{F_2} = -k'(\ell_2 - \ell_0)(-\vec{e_x})$ avec $\ell_2 = \ell_0 - x$

2ᵉ loi de Newton selon $\vec{e_x}$: $= -k' x \, \vec{e_x}$

$\boxed{m\ddot{x} = -2k'x}$

La suite est identique en remplaçant k par $2k'$:

$\boxed{v_{max} = \Delta\ell \sqrt{\dfrac{2k'}{m}}}$ et $\boxed{a_{max} = \dfrac{2k'}{m} \Delta\ell}$

17. $\boxed{\Delta\ell = v_{max}^2 / a_{max} = 1{,}1 \text{ cm}}$; $\boxed{k' = \dfrac{m}{2} \dfrac{a_{max}^2}{v_{max}^2} = 0{,}25 \text{ N.m}^{-1}}$

18. Idem avec N+1 à la place de 2 : $\boxed{\begin{array}{l} \Delta\ell = 1{,}1 \text{ cm} \\ k'' = \dfrac{m}{N+1} \cdot \dfrac{a_{max}^2}{v_{max}^2} \end{array}}$

19. La machine donne (menu STATS) :

$\langle h \rangle = 1{,}1611$ cm et $S_x = 0{,}022$

D'où $u(h) = \dfrac{S_x}{\sqrt{9}} = 0{,}0073\ldots$

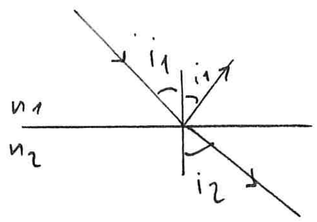
Conclusion $u(h) = 0{,}007$ et $\boxed{h = 1{,}161 \text{ cm} ; u(h) = 0{,}007 \text{ cm}}$

III Détecteur de pluie :

1. $\lambda = \dfrac{v}{f}$ où v = vitesse de propagation (célérité)
et f = fréquence de l'onde qui ne varie pas lors de la propagation.

$\lambda_0 = \dfrac{c}{f}$; $\lambda_e = \dfrac{c/n_{eau}}{f}$; $\lambda_{PB} = \dfrac{c/n_{PB}}{f}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\lambda_{PB} = \dfrac{\lambda_0}{n_{PB}} = 467\,nm \quad \lambda_{eau} = \dfrac{\lambda_0}{n_{eau}} = 526\,nm}$

2.

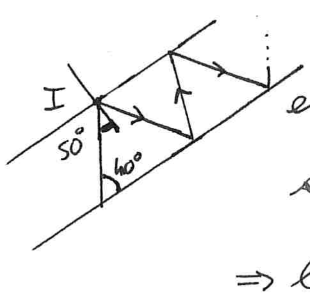


La loi de Snell Descartes de la réfraction indique que le rayon réfracté existe si $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ possède une solution i_2.
La réflexion totale impose donc $\dfrac{n_1 \sin i_1}{n_2} > 1$

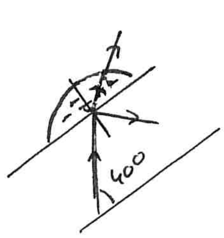
donc $i_1 > \arcsin\left(\dfrac{n_2}{n_1}\right)$

On pose $\boxed{i_{lim} = \arcsin\left(\dfrac{n_2}{n_1}\right)}$ A.N : $\boxed{i_{lim\,VA} = 41{,}8° \quad i_{lim\,VE} = 62{,}5°}$

3. $i_0 \Rightarrow i_1 = 90° - i_0 = 50° > i_{limVA}$
$< i_{limVE}$



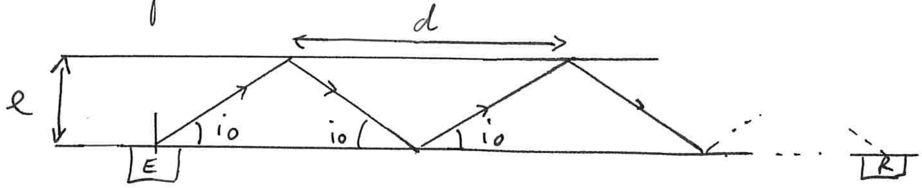
en I il se produira une réflexion totale en l'absence d'eau sur le pare-brise.
$\Rightarrow$ la lumière sera guidée dans le parebrise sans perte d'$\mathcal{E}$ et le signal sur le <u>détecteur sera fort</u>



En présence d'eau, $i_1 = 50° < i_{limVE}$: une partie de la lumière sera refractée et le signal sur le <u>détecteur sera faible</u>.

$\Rightarrow$ On peut facilement différencier les 2 cas (pluie ou pas !)

4. Schéma avec réflexions totales :



C'est une succession de triangles rectangle identiques :
La distance d entre 2 réflexions totales avec l'extérieur est donnée par : $\tan i_0 = \frac{e}{d/2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{d = \frac{2e}{\tan i_0} = 7{,}1 \text{ cm.}}$

D'où $ER = \frac{d}{2} + N \times d + \frac{d}{2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{N = \frac{ER - d}{d} \simeq 27}$

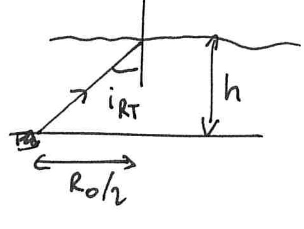
Le grand nombre de réflexions permet de détecter des gouttes de pluie même si elles sont peu nombreuses.

IV Eclairage d'un bassin.

Tant que $i \leq i_{RT}$, les rayons sortent de l'eau et seule une petite partie est réfléchie vers le fond. $\Rightarrow$ disque faiblement éclairé
Lorsque $i > i_{RT}$, il y a réflexion totale et les rayons sont entièrement réfléchis $\Rightarrow$ anneau très brillant. Les derniers rayons sont émis avec $i = \alpha$.

D'où $\boxed{R_0 = 2h \times \tan i_{RT}}$ car $\tan i_{RT} = \frac{R_0/2}{h}$

et $\boxed{R_a = 2h \times \tan \alpha}$



$\Rightarrow$ 1. $R_0 = 2h \tan i_{RT}$
2. L'anneau est plus lumineux que le disque.
3. $R_a = 2h \tan \alpha$