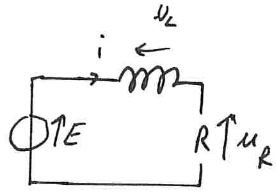
PCSI 1. 22-23

DS n° 3

I. Circuit RL vu en TP :

1. Loi des mailles pour $t \geq 0$: $E = u_L + u_R$



Caractéristique de la bobine : $u_L = L\dfrac{di}{dt}$

et $i = \dfrac{u_R}{R}$

D'où $E = \dfrac{L}{R}\dfrac{du_R}{dt} + u_R$: $\boxed{\dot{u}_R + \dfrac{R}{L}u_R = \dfrac{R}{L}E}$.

2 Pour un système du 1er ordre l'équation canonique est :

$\dot{x} + \dfrac{x}{\tau} = \dfrac{x_\infty}{\tau}$. Par identification : $\boxed{\tau = \dfrac{L}{R} \text{ et } u_\infty = E}$

$\tau = \dfrac{L}{R} = 140\ \mu s$ et $\dfrac{u(\tau)}{\tau} = \sqrt{\left(\dfrac{u(L)}{L}\right)^2 + \left(\dfrac{u(R)}{R}\right)^2} \simeq \dfrac{u(L)}{L}$

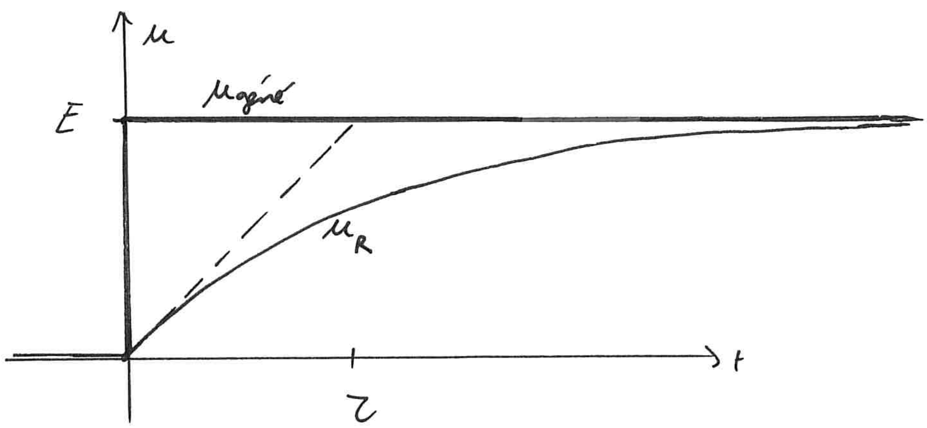
Or $\dfrac{u(L)}{L} = \dfrac{5\%}{\sqrt{3}} = 2{,}9\%$ car $\dfrac{u(L)}{L} > 3 \cdot \dfrac{u(R)}{R}$

$\Rightarrow u(\tau) = 4\ \mu s \Rightarrow \boxed{\tau = 140\ \mu s\ ;\ u(\tau) = 4\ \mu s.}$

3. La solution est : $u_R(t \geq 0) = E + Ae^{-t/\tau}$

Or les CI sont $i(0^-) = i(0^+) = 0$ donc $u_R(0^+) = R\,i(0^+) = 0$

D'où $0 = E + A$ et $A = -E$: $\boxed{u_R(t \geq 0) = E(1 - e^{-t/\tau})}$



4. Pour $t = t_x$: $\frac{x}{100} \cdot E = E(1 - e^{-t_x/\tau})$

donc $1 - \frac{x}{100} = e^{-t_x/\tau} \Rightarrow t_x = -\tau \ln\left(1 - \frac{x}{100}\right)$

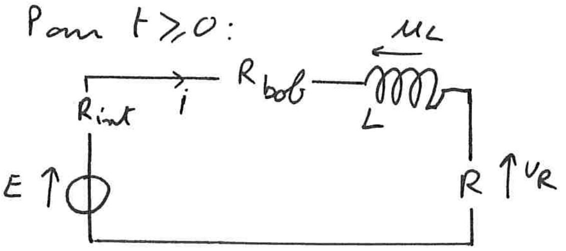
$$\boxed{t_x = -\tau \cdot \ln\left(\frac{100-x}{100}\right) = \tau \cdot \ln\left(\frac{100}{100-x}\right)}$$

5. $\Delta t = t_{90} - t_{10} = \tau \ln \frac{100-10}{100-90} = \boxed{\tau \ln 9 = \Delta t}$.

6. $\mathcal{E}_{r}(L)_{t=0,\infty} = \frac{1}{2} L i_\infty^2 - \frac{1}{2} L i_0^2$

avec $i_\infty = E/R$ et $i_0 = 0 \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_r(L) = \frac{1}{2} L \frac{E^2}{R^2} = 5{,}8 \ \mu J}$.

7. Pour $t \geq 0$:



La loi des mailles donne :

$E - R_{int}\, i - R_{bob}\, i - u_L - u_R = 0$

avec $i = \frac{u_R}{R}$ et $u_L = L \frac{di}{dt}$ on obtient :

$E - \frac{R_{int} + R_{bob}}{R} \cdot u_R - \frac{L}{R} \dot{u}_R - u_R = 0$

Soit : $\boxed{\dot{u}_R + u_R \cdot \frac{R + R_{bob} + R_{int}}{L} = E \cdot \frac{R}{L}}$

8. Ici $\boxed{\tau' = \frac{L}{R + R_{bob} + R_{int}}}$ et $u_R = E \frac{R}{R + R_b + R_i} + A e^{-t/\tau'}$

avec la CI : $u_R(0) = R\, i(0) = 0 \Rightarrow A = -E \frac{R}{R + R_b + R_i}$

D'où $\boxed{u_R = E \cdot \frac{R}{R + R_b + R_i} \left(1 - e^{-t/\tau'}\right)}$

9. $\boxed{u_{géné}} = E - R_{int}\, i = E - \frac{R_{int}}{R} u_R = \boxed{E \times \frac{R + R_b}{R + R_b + R_i} + E \times \frac{R_i}{R + R_b + R_i} e^{-t/\tau'}}$

10. 1. $u_R(\infty) = E \cdot \frac{R}{R + R_b + R_i} < E$: l'écart 1 est expliqué

2. $u_{géné}$ est une exponentielle qui converge vers : $u_{géné}(\infty) = E \frac{R + R_b}{R + R_b + R_i}$

l'écart 2 est expliqué.

3. On constate que $u_R(\infty) \neq u_{géné}(\infty) \Rightarrow$ écart (3) Ok.

On résoud : $\begin{cases} u_{géné}(\infty) = E \cdot \dfrac{R+R_b}{R+R_b+R_i} \\ u_R(\infty) = E \cdot \dfrac{R}{R+R_b+R_i} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{u_{géné}(\infty)}{u_R(\infty)} = 1 + \dfrac{R_b}{R}$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{R_b = R\left(\frac{u_{géné}(\infty)}{u_R(\infty)} - 1\right) = 10,6\,\Omega.}$$

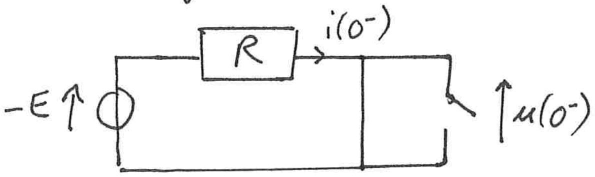
et $\boxed{R_i = E \cdot \dfrac{R}{u_R(\infty)} - R_b - R = 42\,\Omega.}$

11. On constate que $u_{géné}(t=0) > E$.

Aucune idée de l'origine de cette valeur surprenante....

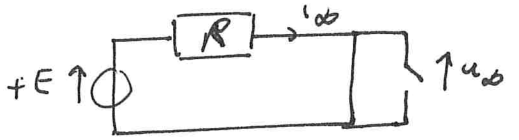
II Circuit anti-résonant

1. En régime établi stationnaire la bobine équivaut à un fil et le condensateur à un interrupteur fermé :



On a donc et $\boxed{\begin{array}{l} u(0^-) = 0 \\ i(0^-) = -E/R \end{array}}$

2. De même pour le régime établi stationnaire en $t \to +\infty$:



On a donc $\boxed{\begin{array}{l} u_\infty = 0 \\ i_\infty = +E/R \end{array}}$

3. La loi des maille donne : $E = Ri + u$ ① $(t \geq 0)$

La loi des nœuds donne : $i = i_L + i_C$

Les caractéristiques : $u = L\dfrac{di_L}{dt}$ et $i_C = C\dot{u}$

$\dfrac{d①}{dt}$ et ② donnent : $0 = R\dfrac{d}{dt}(i_L + i_C) + \dot{u}$

d'où $0 = R\dfrac{u}{L} + RC\ddot{u} + \dot{u}$: $\boxed{\ddot{u} + \dfrac{1}{RC}\dot{u} + \dfrac{u}{LC} = 0}$

De la forme : $\ddot{x} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_\infty$ $(x_\infty = 0 \text{ ici})$

avec $\boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$ et $\dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{1}{RC}$ donc $\boxed{Q = R\sqrt{\dfrac{C}{L}}}$

R : Q augmente avec R : c'est logique ds ce circuit car on se rapproche du circuit LC idéal.

4. Si le régime est pseudo-périodique, $Q > 1/2$ et les racines de l'équation caractéristique sont complexes.

équation caractéristique : $r^2 + \dfrac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$

racines : $r_{+/-} = -\dfrac{\omega_0}{2Q} \pm i\sqrt{4\omega_0^2 - \omega_0^2/Q^2}/2$ $\left(\Delta = \dfrac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 < 0\right)$

$= -\dfrac{\omega_0}{2Q} \pm i\omega_0\sqrt{1 - 1/4Q^2}$

On pose $\boxed{\Omega = \text{pseudo pulsation} = \omega_0 \sqrt{1 - 1/4Q^2}}$

et $\boxed{u(t \geq 0) = e^{-\omega_0 t/2Q} \cdot (A \cos \Omega t + B \sin \Omega t).}$

5. Les CI sont $u(0^-) = u(0^+) = 0$ par continuité de u_C

et $i_L(0^-) = i_L(0^+) = -\frac{E}{R}$ — —— de i_L.

Les équations du circuit écrites en $t = 0^+$ donnent :

$\dot{u}(0^+) = \frac{i_C(0^+)}{C}$ avec $i_C(0^+) = i(0^+) - i_L(0^+)$

et $E = R\,i(0^+) + u(0^+) \rightarrow i(0^+) = E/R$

Finalement $\dot{u}(0^+) = \frac{1}{C}\left(\frac{E}{R} - \left(-\frac{E}{R}\right)\right) = \frac{2E}{RC}$: $\boxed{\begin{array}{l} u(0^+) = 0 \\ \dot{u}(0^+) = \frac{2E}{RC} \end{array}}$

$\dot{u}(t \geq 0) = e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \Big(-\frac{\omega_0}{2Q} A \cos \Omega t + B \sin \Omega t$
$- \Omega A \sin \Omega + B\Omega \cos \Omega t \Big)$

D'où $\begin{cases} 0 = A \\ \frac{2E}{RC} = -\Omega A + B\Omega \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} A = 0 \\ B = \frac{2E}{\Omega RC} \end{array}}$

6. On relève $6T \simeq 0{,}010$ s d'où $\boxed{T = 1{,}67 \text{ ms.}}$

On voit qu'il y a bcp d'oscillations : l'amortissement est faible donc $Q > 3$ et $\boxed{\omega_0 \simeq \Omega \text{ et } T_0 \simeq T}$

7. On relève $u(t_1) = 1{,}4$ V et $u(t_1 + 4T) = 0{,}2$ V.

On en déduit : $\boxed{\delta = \frac{1}{4} \ln \frac{1{,}4}{0{,}2} = 0{,}49}$

8. $x(t + nT) = e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q} - \frac{\omega_0 nT}{2Q}} \cdot B \sin(\Omega t + \Omega nT)$.

or $\Omega T = 2\pi$ donc $x(t+nT) = \underbrace{e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} B \sin \Omega t}_{x(t)} \cdot e^{-\frac{\omega_0 nT}{2Q}}$

Donc $\delta = \frac{1}{n} \ln\left(e^{+\frac{\omega_0 nT}{2Q}}\right) = \frac{\omega_0 T}{2Q} \underset{T \simeq T_0}{\simeq} \frac{2\pi}{2Q} = \frac{\pi}{Q}$: $\boxed{\delta = \frac{\pi}{Q}}$

Donc $\boxed{Q = \frac{\pi}{\delta} = 6{,}5}$

9. On a : $\frac{1}{RC} = \frac{\omega_0}{Q}$ donc $\boxed{C = \frac{Q \cdot T_0}{R\, 2\pi} = 864 \text{ nF}}$ et $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$

$\Rightarrow \boxed{L = \frac{T_0^2}{C 4\pi^2} = 82 \text{ mH}}$

Régime sinusoïdal forcé

10. $$\boxed{\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{\underline{u}_m}{\underline{i}_m}}$$

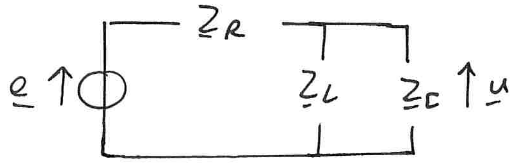
Pour une bobine : $u = L\frac{di}{dt}$ en c.r donc $\underline{u} = L\frac{d\underline{i}}{dt} = jL\omega\underline{i}$

car $\underline{i} = \underline{i}_m e^{j\omega t}$ donc $\frac{d\underline{i}}{dt} = j\omega\,\underline{i}_m e^{j\omega t} = j\omega\cdot\underline{i}$.

Finalement $$\boxed{\underline{Z}_L = \frac{\underline{u}_L}{\underline{i}_L} = jL\omega.}$$

De m̂ pour C : $i = C\frac{du}{dt}$ donc $\underline{i} = Cj\omega\underline{u}$ et $\boxed{\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}}$.

11. En notation complexe le circuit devient :



Un diviseur de tension donne : $$\underline{u} = \frac{(\underline{Z}_L /\!/ \underline{Z}_C)}{\underline{Z}_R + (\underline{Z}_L /\!/ \underline{Z}_C)}\,\underline{e}$$

or $\underline{u} = \underline{u}_m e^{j\omega t}$ et $\underline{e} = e_m e^{j\omega t}$

donc $$\underline{u}_m = \frac{\underline{Z}_L\cdot\underline{Z}_C}{\underline{Z}_R(\underline{Z}_L+\underline{Z}_C)+\underline{Z}_L\cdot\underline{Z}_C}\,e_m = \frac{e_m}{1+\frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_L}+\frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_C}}$$

d'où $$\boxed{\underline{u}_m = \frac{e_m}{1+\frac{R}{jL\omega}+jRC\omega}}$$

Identification avec $\underline{u}_m = \frac{e_m}{1+j\alpha\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)} \Rightarrow \begin{cases} jRC = j\frac{\alpha}{\omega_0} & (1) \\ \frac{R}{jL} = -j\alpha\omega_0 & (2) \end{cases}$

D'où (1)×(2) : $R^2\frac{C}{L} = \alpha^2$

et (2)/(1) : $-\frac{1}{LC} = -\omega_0^2 \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 7{,}07\cdot10^{+3}\ \text{rad/s}}\ \boxed{\alpha = R\sqrt{\frac{C}{L}} = 7{,}1}$

12. $u(t) = \mathrm{Re}(\underline{u}) = u_m\cos(\omega t+\varphi_u)$ avec $u_m = |\underline{u}_m|$ et $\varphi_u = \arg(\underline{u}_m)$

$$\Rightarrow \boxed{u(t) = \frac{e_m}{\sqrt{1+\alpha^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}\cos\left(\omega t-\arctan\left(\alpha\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)\right)}$$

13. $\underline{u}_m \xrightarrow[\omega \to 0]{BF} 0$ donc $\boxed{u \xrightarrow{BF} 0.}$

C'est cohérent car u est la tension aux bornes de L et qu'en basse fréquence, L équivaut à un fil.

14. $\underline{u}_m \xrightarrow[\omega \to \infty]{HF} 0$ donc $\boxed{u \xrightarrow{HF} 0}$

idem car u = tension aux bornes de C et qu'en HF C équivaut à un fil.

15. $$u_m = \frac{e_m}{\sqrt{1+\alpha^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$ est maximale qd $\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = 0$

donc pour $\boxed{\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 7{,}07 \cdot 10^3 \text{ rad.s}^{-1}}$

C'est la <u>résonance</u> de u.

On a alors $\boxed{u_m(\omega_0) = e_m = 5{,}0 \text{ V}}$

16. La bande passante est l'ensemble des pulsations pour lesquelles : $u_m(\omega) \geq \frac{u_{m,max}}{\sqrt{2}}$:

$$\frac{e_m}{\sqrt{1+\alpha^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} = \frac{e_m}{\sqrt{2}} \Rightarrow 1 + \alpha^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 = 2$$

D'où 2 éq. du 2nd degré : $\underset{(1)}{\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) = \frac{1}{\alpha}}$ et $\underset{(2)}{\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) = -\frac{1}{\alpha}}$

(1) s'écrit : $\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - \frac{\omega}{\alpha\omega_0} - 1 = 0$ et (2) : $\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{1}{\alpha}\frac{\omega}{\omega_0} - 1 = 0$

La racine positive de (1) est :

$$\frac{\omega_2}{\omega_0} = \frac{1}{2\alpha} + \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + 4} \times \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_2 = \omega_0\left(\frac{1}{2\alpha} + \sqrt{\frac{1}{4\alpha^2} + 1}\right) = 7{,}6 \cdot 10^3 \text{ rad.s}^{-1}}$$

pour (2), la racine positive :

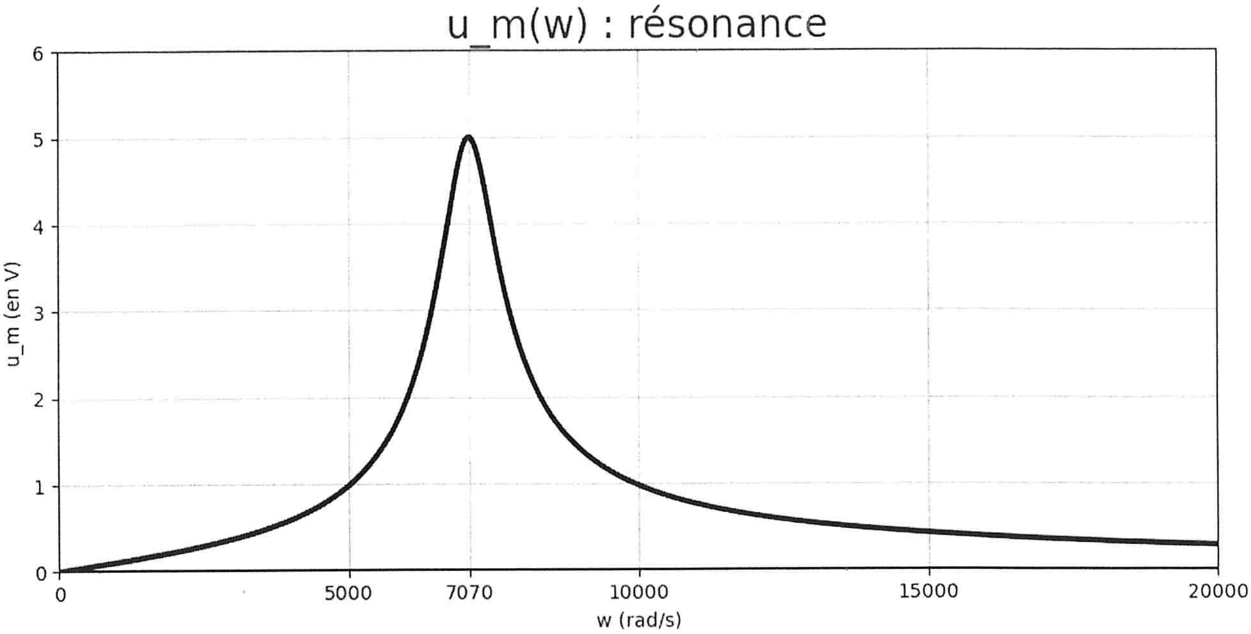
$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = -\frac{1}{2\alpha} + \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + 4} \times \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\omega_1 = \omega_0\left(\frac{-1}{2\alpha} + \sqrt{\frac{1}{4\alpha^2} + 1}\right) = 6{,}6 \cdot 10^3 \text{ rad.s}^{-1}}$$

car $\alpha = 7{,}07$ et $\omega_0 = 7{,}07 \cdot 10^3$ rad.s^{-1}

17. $$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{\omega_0}{\omega_0\left(\frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{2\alpha}\right)} = \boxed{\alpha = 7{,}1 = Q}$$

18.



19. $\Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_{géné} = \varphi_u = \arg(\underline{u}_m) = -\arctan\left(\alpha\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)$

20. $\boxed{\Delta\varphi \xrightarrow[\omega\to 0]{BF} \pi/2 \text{ rad}}$ $\boxed{\Delta\varphi \xrightarrow{HF} -\pi/2 \text{ rad}}$ $\boxed{\Delta\varphi(\omega_0) = 0}$

21. On relève le décalage temporel : Δt = 1 carreau
et la période du signal : T = 8 carreaux
On en déduit $|\Delta\varphi| = 2\pi \cdot \frac{\Delta t}{T} = \frac{\pi}{4}$ rad.
Signe : on voit que (2) est en avance sur (1) (le passage par le maximum de (2) précède le passage par le maximum de (1)) : $\Delta\varphi_{2/1} = \varphi_{u/géné} > 0$.
$\boxed{\Delta\varphi_{2/1} = +\frac{\pi}{4} \text{ rad}}$

22. On a : $\frac{\pi}{4} = -\arctan\left(\alpha\left(\frac{\omega_3}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_3}\right)\right)$ donc

$\alpha\left(\frac{\omega_3}{\omega_0} - \frac{\omega_3}{\omega_0}\right) = -\frac{1}{\alpha}$: c'est l'équation (2) de la question 16

dont la solution positive est $\omega_1 \Rightarrow \boxed{\omega_3 = \omega_1}$.
[Le déphasage de $\pm\pi/4$ correspond aux pulsations de coupure et comme $\varphi > 0$, il s'agit ici de ω_1.]

23. $Ri = e - u$: lorsque u est maximal (en ω_0), i est minimal
c'est une antirésonance en intensité.