

Samedi 18 mars 2023

DEVOIR SURVEILLE N°6 PHYSIQUE

I. NASA's Mars Exploration Program (d'après Centrale PC 2022) :

Un demi-siècle après avoir marché sur la Lune, l'exploration spatiale semble se fixer à moyen terme l'objectif de l'exploration de la planète Mars par l'homme. Une telle expédition suppose de résoudre un très grand nombre de problèmes concernant aussi bien les aspects techniques que les aspects humains.

Ce sujet propose d'étudier la cohérence de l'un des nombreux scénarios élaborés par la NASA pour un vol habité vers Mars.

Les données numériques sont regroupées en fin d'énoncé.

A. Trajectoires circulaires de la Terre et de Mars

On se place dans le référentiel héliocentrique supposé galiléen.

1. Donner les dimensions de la constante gravitationnelle G ainsi que son unité dans le système international.
2. Montrer que le moment cinétique \vec{L}_O en O , centre du Soleil, d'un objet M de masse m soumis uniquement à l'attraction gravitationnelle du Soleil est une constante du mouvement. Comment appelle-t-on une telle constante ?
3. On utilise les coordonnées cylindriques $(0, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ avec \vec{e}_z tel que $\vec{L}_O = L_O \vec{e}_z$. Justifier que le mouvement est plan et exprimer $C = r^2 \frac{d\theta}{dt}$ en fonction de L_O et de m . Quel est le nom de cette grandeur ?

Dans cette première partie, les orbites des planètes autour du Soleil sont assimilées à des cercles de rayon noté a égal au demi-grand axe des ellipses réelles.

4. Déterminer, dans le cas d'une orbite circulaire de rayon a , la vitesse V de l'objet en fonction de G , M_S et a . Calculer les valeurs numériques de V_T , la vitesse orbitale de la Terre et de V_M , celle de Mars, dans le référentiel héliocentrique.
5. Démontrer l'expression de l'énergie potentielle associée à la force gravitationnelle en fonction de r ($r = OM$) [en précisant l'origine bien sûr !] et établir de l'énergie mécanique de l'objet de masse m sur son orbite circulaire autour du Soleil en fonction de G , M_S , a et m .
6. Exprimer la période de rotation T de l'objet en fonction G , M_S et a . Comment s'appelle la généralisation de l'expression de T aux trajectoires elliptiques ? En déduire les valeurs numériques de la période de la Terre T_T ainsi que celle de Mars T_M exprimées en jours.

B. Voyage aller Terre – Mars, orbite de transfert

On étudie désormais le trajet d'un vaisseau spatial (masse notée m) depuis l'orbite de la Terre jusqu'à l'orbite de Mars dans le référentiel héliocentrique.

D'un point de vue énergétique, la méthode la plus efficace pour envoyer un vaisseau d'une orbite circulaire à une autre orbite circulaire coplanaire est de le placer sur une trajectoire de transfert elliptique tangente aux deux orbites circulaires, donc ici aux orbites de Mars et de la Terre (ellipse de Hohmann).

On considère que **seule l'attraction solaire agit** sur le vaisseau pendant son mouvement.

Initialement, on considère que le vaisseau spatial est sur l'orbite de Terre autour du soleil : son mouvement dans le référentiel héliocentrique est donc circulaire de rayon a_T , rayon de la trajectoire de la Terre, et sa vitesse est donc égale à la vitesse V_T de la Terre sur son orbite.

Le vaisseau est donc initialement assez loin de la Terre pour que l'attraction terrestre soit négligeable mais, à l'échelle du système solaire, le vaisseau peut être considéré comme étant au même endroit que la Terre sur son orbite circulaire.

De même à son arrivée sur l'orbite de Mars, on considère que le vaisseau reste assez loin de Mars pour que l'attraction gravitationnelle de la planète soit négligeable, mais à l'échelle du système solaire, le vaisseau peut être considéré comme étant au même endroit que Mars.

7. Représenter l'allure de l'orbite de transfert (trajectoire de Hohmann) sur la figure 1 du document réponse sur lequel figurent les orbites de la Terre et de Mars. Exprimer le demi-grand axe a_H cette orbite en fonction des demi-grands axes a_T et a_M . Faire l'A.N.

8. En déduire l'expression de la période T_H de l'orbite de transfert en fonction des rayons a_T et a_M notamment. Faire l'A.N.

9. L'expression de l'énergie mécanique obtenue pour le mouvement circulaire peut se généraliser au cas d'une orbite elliptique. Énoncer et démontrer l'expression générale.

10. Exprimer en fonction de V_T , a_M et a_T , la vitesse V'_T que doit avoir le vaisseau au départ de sa trajectoire de transfert (donc en $r = a_T$). [Rappel : la question 4 donne une relation entre G , M_S , a_T et V_T .] En déduire la variation de vitesse $\Delta V_T = V'_T - V_T$. Faire l'A.N. pour V'_T et ΔV_T .

11. Exprimer puis calculer la durée Δt du voyage jusqu'à l'orbite de Mars (en seconde puis en jours).

La position de la Terre au temps $t = 0$ du départ du vaisseau est prise comme origine angulaire ($\theta_T(t = 0) = 0$).

12. On note α_0 l'angle Terre – Soleil – Mars ($\alpha_0 = \theta_M(t = 0) - \theta_T(t = 0)$) formé par les directions de Mars et de la Terre, vus du Soleil, au moment du lancement afin que Mars soit au rendez-vous à l'arrivée du vaisseau. On note $\omega_T = 2\pi/T_T$ et $\omega_M = 2\pi/T_M$ les vitesses de rotation de la Terre et de Mars.

Exprimer α_0 en fonction de Δt et ω_M . Calculer la valeur numérique de α_0 en radians puis en degrés et indiquer la position de Mars au moment du lancement sur la figure 1 du document réponse.

13. Déterminer la période T_{lanc} entre deux fenêtres de lancement depuis la Terre en fonction de ω_T et ω_M puis en fonction de T_T et T_M . Faire l'A.N.

C. Durée de la mission

Après un séjour autour de Mars, le voyage retour emprunte le même type d'orbite de transfert qu'à l'aller.

14. Déterminer l'angle α_1 (Terre – Soleil – Mars) au moment du départ de Mars afin que la Terre soit au rendez-vous à l'arrivée du vaisseau.

15.* En déduire la durée Δt_{Mars} (en jours) que les astronautes vont pouvoir passer sur Mars et la durée totale de la mission Δt_{tot} (en jours également).

D. Raccourcissement de la durée de la mission

Moyennant une plus grande dépense énergétique, il est possible de modifier ce scénario de mission. Ainsi, une variation de vitesse $\Delta \vec{V}'_T$ colinéaire à $\Delta \vec{V}_T$ mais de norme plus importante au départ permet de réduire le temps du voyage aller.

Dans la suite, on cherche une réduction de 25 % de l'angle balayé par le vaisseau pour atteindre l'orbite de Mars autour du Soleil. On se place de nouveau avec la position de la Terre au lancement prise comme origine angulaire ($\theta_T(t=0) = 0$) et on souhaite que le vaisseau atteigne Mars à un instant $\Delta t'$ tel que $\theta_M(\Delta t') = 3\pi/4$.

16. Placer sur la figure 2 du document réponse la position de Mars à l'arrivée du vaisseau.

17. Justifier que r_p , le périhélie de la trajectoire du vaisseau (distance minimale du Soleil au vaisseau), vérifie $r_p = a_T$.

On admet que la nouvelle trajectoire du vaisseau est une ellipse dont l'un des foyers est le Soleil et d'équation polaire :

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

où p est appelé paramètre de la conique et e son excentricité.

18. Exprimer a_T et a_M en fonction de p et e puis montrer que l'excentricité s'écrit :

$$e = \frac{a_M - a_T}{a_T + \frac{1}{\sqrt{2}} a_M}$$

et calculer la valeur numérique de e et r_A qui est la distance Soleil – vaisseau à l'aphélie. Tracer sur la figure 2 l'allure de la trajectoire.

19. Exprimer le demi-grand axe a'_H de la trajectoire elliptique en fonction de a_T et e . Faire l'A.N.

20. Exprimer l'énergie mécanique E_m du vaisseau sur cette trajectoire en fonction de m , V_T et e . [Penser à simplifier les expressions].

21. En déduire la vitesse V''_T que doit avoir le vaisseau au départ pour se placer sur sa nouvelle orbite, en fonction de V_T et e .

22. Donner, en fonction de V_T et e , la variation de vitesse $\Delta V''_T = V''_T - V_T$ qu'il faut communiquer au vaisseau pour le mettre sur sa nouvelle trajectoire de transfert. Calculer la valeur numérique de $\Delta V''_T$.

23. Exprimer $C = r^2 \frac{d\theta}{dt}$ en fonction de a_T et V_T'' puis en fonction de a_T , e et V_T .

24. En séparant les variables de la relation précédente, évaluer le temps $\Delta t'$ du transfert entre la Terre et Mars. Exprimer $\Delta t'$ en fonction de a_T , V_T et e puis faire l'A.N.

On donne :

$$\int_0^{\theta_M(\Delta t')} \frac{d\theta}{(1 + e \cos \theta)^2} = 2,15$$

avec l'excentricité calculée en question **18**.

E. Calcul du coût énergétique d'une libération de l'attraction terrestre

Jusqu'ici nous avons considéré que le vaisseau était initialement sur l'orbite circulaire de la Terre autour du soleil. En réalité, il faut une première étape au cours de laquelle le vaisseau s'extrait de l'attraction terrestre.

On se placera dans le référentiel géocentrique supposé galiléen et on ne considèrera désormais que l'attraction terrestre, l'attraction solaire étant négligée dans cette partie.

Nous allons considérer que le vaisseau est initialement immobile sur le sol terrestre en un point de latitude $\lambda = 20^\circ$.

25. Exprimer l'énergie E_1 que fournit le lanceur (Space X ou Ariane) pour positionner le vaisseau sur une orbite circulaire basse d'altitude $h = 200$ km depuis le sol. Faire l'A.N. avec $m = 360$ tonnes. [Le vaisseau sera en réalité assemblé en orbite car aucun lanceur n'est actuellement capable de lancer une telle masse en une seule fois.]

26. Depuis l'orbite circulaire basse, le lanceur éjecte le vaisseau de manière à positionner celui-ci sur une orbite parabolique. Exprimer puis calculer l'énergie supplémentaire E_2 fournie par le lanceur au vaisseau.

27. Quelle sera alors la vitesse du vaisseau dans le référentiel géocentrique à grande distance, c'est-à-dire lorsqu'il est suffisamment éloigné pour que l'on puisse considérer qu'il n'est plus soumis à son attraction.

L'attraction du soleil devient dès lors prépondérante et on peut alors considérer que le vaisseau est sur la même orbite circulaire que la Terre dans le référentiel héliocentrique (hypothèse utilisée dans les parties précédentes).

28. Voyez-vous un intérêt à un lancement depuis la Lune plutôt que depuis la surface de la Terre ? [La réponse à cette question ouverte doit être argumentée et peut contenir beaucoup d'aspects intéressants !].

F. Le projet NERVA (Nuclear Engine for Rocket Vehicle Application)

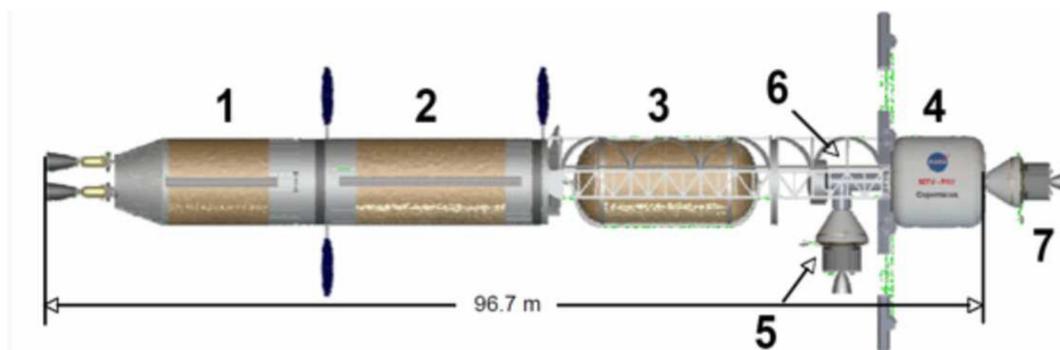
Pour les phases d'insertion sur les trajectoires de transferts, la NASA préconise la propulsion nucléaire qui permet de réduire considérablement la masse de carburant par rapport à une propulsion chimique.

Ce type de technologie a été mis au point dès les années 1960 pour le NERVA, elle repose sur l'éjection à grande vitesse d'hydrogène réchauffé par un réacteur nucléaire.

Le scénario propose l'utilisation d'un vaisseau assemblé en orbite basse terrestre constitué en modules indépendants afin de répondre à diverses exigences nécessaires au voyage interplanétaire.

Ce vaisseau, d'un diamètre de 10 m et de près de 100 m de long a une masse d'environ 360 t.

Il est équipé de deux moteurs NERVA dotés chacun d'une source thermique nucléaire d'une puissance de 1 GW et fournissant une poussée unitaire de 220 kN.



- | | |
|--|--|
| (1) Étage de propulsion nucléaire | (2) Réservoir d'hydrogène liquide fixe |
| (3) Réservoir d'hydrogène liquide largable | (4) Habitat utilisé pour le transit Terre-Mars |
| (5) Vaisseau Orion | (6) Système de télécommunication |
| (7) Port d'amarrage pour le vaisseau décollant de Mars | |

De l'hydrogène liquide est stocké dans des réservoirs. On note $m_0 = 360$ tonnes la masse initiale du vaisseau, $m(t)$ sa masse à l'instant t , $D = -\frac{dm}{dt} > 0$ le débit massique des gaz éjectés par les propulseurs NERVA (supposé constant jusqu'à épuisement du dihydrogène) et v_1 la vitesse des gaz en sortie de tuyère par rapport au vaisseau.

Dans la suite, le temps de poussée des moteurs est suffisamment court par rapport au temps des transferts pour considérer la trajectoire rectiligne dans le référentiel héliocentrique pendant une phase de propulsion. De plus, les forces de gravitation sont négligeables devant la poussée des moteurs. L'ensemble est donc considéré isolé le temps de la poussée des moteurs.

29.** En utilisant la conservation entre t et $t + dt$ de la quantité de mouvement du système {vaisseau + gaz éjecté sur la durée dt } (conséquence du caractère isolé de ce système), établir l'équation différentielle suivante :

$$m(t) \frac{d\vec{v}}{dt} = -D\vec{v}_1$$

On pourra faire un développement limité de $\vec{v}(t + dt)$ au 1^{er} ordre en dt .

Par la suite, on désigne par le terme « poussée », la grandeur homogène à une force définie par :

$$\vec{F}_{poussée} = -D\vec{v}_1$$

Afin de pouvoir comparer l'efficacité des systèmes de propulsion ayant des débits, des vitesses d'éjection, ou des sources d'énergie différentes, on utilise généralement la notion d'impulsion spécifique notée I_{sp} s'exprimant en seconde. On peut la définir comme le temps pendant lequel une masse initiale m_i d'ergol est capable de donner une poussée égale à son poids à la surface de la Terre.

30. Établir I_{sp} en fonction de g et v_1 . Pour le vaisseau envisagé par la NASA, on a $I_{sp} = 825$ s. Calculer la vitesse v_1 d'éjection des gaz du moteur NERVA.

31. Pour une injection sur une trajectoire de Hohmann vers Mars depuis l'orbite de la Terre, une variation de vitesse $\Delta V_T = 2,9 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$ est requise. Déterminer la masse m_c de dihydrogène consommée. Le résultat est-il cohérent avec le dimensionnement proposé du vaisseau [la masse volumique du dihydrogène fait partie des données] ?

32. Quel sera le surplus de consommation dans l'hypothèse du voyage raccourci évoqué dans la sous-partie **D** ?

Données numériques :

Masse du Soleil	$M_S = 2,00 \times 10^{30} \text{ kg}$
Masse de Mars	$M_M = 6,39 \times 10^{23} \text{ kg}$
Masse de la Terre	$M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$
Masse de la Lune	$M_L = 7,34 \times 10^{22} \text{ kg}$
Rayon de la Terre	$R_T = 6370 \text{ km}$
Rayon de la Lune	$R_L = 1740 \text{ km}$
Rayon moyen de l'orbite de la Terre	$a_T = 150 \times 10^6 \text{ km}$
Rayon moyen de l'orbite de Mars	$a_M = 228 \times 10^6 \text{ km}$
Constante gravitationnelle	$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ SI}$
Période de rotation de la Terre	$T = 86\,164 \text{ s}$
Champ de pesanteur terrestre	$g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$
Masse volumique du dihydrogène liquide	$\mu_{\text{H}_2 \text{ liq}} = 71,0 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$

II. Utilisation de Python pour diverses trajectoires :

Rappels :

La résolution d'une équation différentielle de la forme : $dx/dt = F(x, t)$ avec la condition initiale $x(t_0) = x_0$ peut être faite la fonction `odeint` avec les instructions :

```
T = np.arange(t_0, t_f, pas_temporel) # création du tableau T
X = odeint(F, x_0, T)
```

Le tableau unidimensionnel `T` contient les instants t_i pour lesquels la fonction $x(t)$ est calculée.

Les valeurs de $x(t_i)$ sont regroupées dans le tableau unidimensionnel `X`.

La fonction $F(x, t)$ renvoie la valeur de la dérivée de x par rapport au temps à l'instant t : $\frac{dx}{dt}(t)$.

Il est possible de traiter plusieurs équations différentielles du 1^{er} ordre couplées en remplaçant le réel x dans la définition de F par un tuple $z = (x_1, x_2, \dots)$ et en remplaçant le réel x_0 dans `odeint` par le tuple $(x_1(t_0), x_2(t_0), \dots)$. Le tableau `X` est alors bidimensionnel : chaque ligne correspond aux valeurs de x_i aux instants t_i et il y a autant de colonnes que de variables x_i .

1. Échauffement

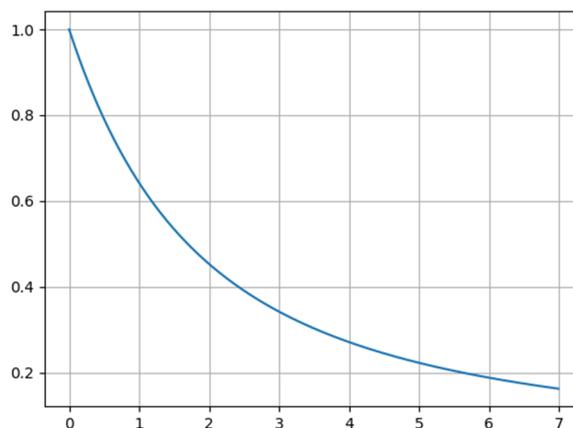
Soit l'équation différentielle :

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x^2}{1+x} \quad x(0) = 1$$

Compléter la définition de la fonction `F1` [= recopier la ligne 7 en entier sur la copie] du script suivant afin d'obtenir le tableau unidimensionnel des valeurs de x aux instants t_i du tableau `T`.

```
1. from math import *
2. import numpy as np
3. import matplotlib.pyplot as plt
4. from scipy.integrate import odeint
5.
6. def F1(x,t):
7.     return
8.
9. T = np.arange(0,7,0.01) # création du tableau T
10. X = odeint(F1,1,T)
11. plt.plot(T,X,'-')
12. plt.grid('on')
13. plt.show()
```

Voici la courbe obtenue :



2. Lancement radial sans frottement

On s'intéresse à une sonde lancée depuis une altitude $z = 200 \text{ km}$ avec une vitesse \vec{V}_0 **radiale** de norme $V_0 = 4000 \text{ m.s}^{-1}$.

Le mouvement est alors **unidimensionnel** (selon \vec{e}_r) avec les conditions initiales suivantes :

$$r(t=0) = R_T + 200e3 \quad \frac{dr}{dt}(t=0) = V_0 = 4e3 \text{ m.s}^{-1}$$

On souhaite obtenir une représentation graphique de la solution numérique en négligeant les frottements.

2.a. Etablir, à l'aide du PFD, l'équation différentielle vérifiée par la variable $r(t)$ et la transformer en un système de deux équations différentielles couplées vérifiées par $r(t)$ et $v(t)$ où $v = dr/dt$.

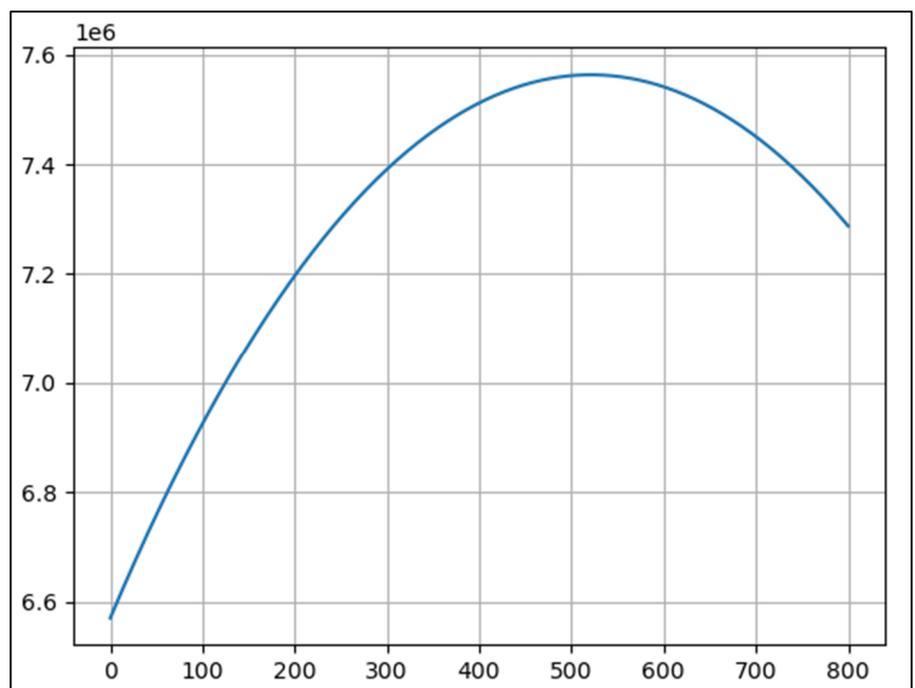
2.b. Compléter les lignes **19, 20 et 23** du fichier ci-dessous afin de résoudre le système précédent. La variable z désigne le couple (r, v) .

```

14. G = 6.67e-11 # en USI
15. R_T = 6370e3 # en m
16. M_T = 6e24 # en kg
17.
18. def F2(z,t):
19.
20.     return
21.
22. T = np.arange(0,800,0.1) # création de T
23. Z = odeint(F2,...,T)
24. plt.plot(T,Z[:,0],'-')
25. plt.grid('on')
26. plt.show()

```

2.c. Voici la courbe obtenue :



Par lecture graphique, déterminer l'altitude maximale atteinte par la sonde.

3. Lancement orthoradial sans frottement

La sonde est ici aussi lancée depuis l'altitude $z = 200 \text{ km}$ mais cette fois la vitesse initiale \vec{V}_0 est **orthoradiale** avec $V_0 = 9000 \text{ m.s}^{-1}$. On néglige toujours les frottements.

Le mouvement est alors bidimensionnel avec les conditions initiales suivantes :

$$\begin{aligned} r(t=0) &= R_T + 200e3 & \frac{dr}{dt}(t=0) &= 0 \\ \theta(t=0) &= 0 & \frac{d\theta}{dt}(t=0) &= \frac{V_0}{r(t=0)} = 1.37 \times 10^{-3} \text{ rad.s}^{-1} \end{aligned}$$

3.a. Rappeler l'expression générale de l'accélération en coordonnées polaires.

3.b. Etablir le système d'équations différentielles couplées vérifiées par les variables $r(t)$ et $\theta(t)$. Il est possible, mais non indispensable, d'introduire la constante des aires C . Transformer ce système en un système d'équations du 1^{er} ordre. On pourra introduire les variables $v_r = dr/dt$ et $\omega = \frac{d\theta}{dt}$.

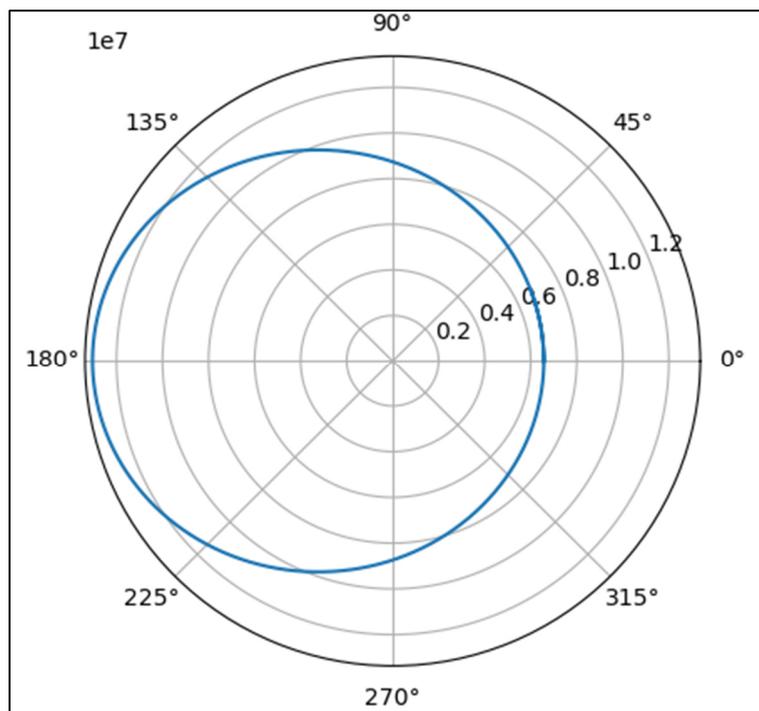
3.c. Compléter les lignes **29, 30 et 33** du fichier ci-dessous afin de résoudre le système précédent. La variable z désigne le quadruplet (r, θ, v_r, ω) .

```

28. def F3(z, t):
29.
30.     return
31.
32. T = np.arange(0, 10000, 1) # création de T
33. Z = odeint(F3, ..., T)
34. plt.polar(Z[:,1], Z[:,0], '-')
35. plt.grid('on')
36. plt.show()

```

3.d. Voici la courbe obtenue :



Par lecture graphique, déterminer le demi-grand axe de l'ellipse.

4. Lancement orthoradial avec frottements

On souhaite désormais prendre en compte les frottements de l'atmosphère avec un modèle simple.

On considère ici que les frottements sont nuls au-delà de 250 km d'altitude et qu'en deçà, l'atmosphère produit un frottement fluide proportionnel à la vitesse de la sonde selon un modèle

de Stokes : $\vec{F}_{frot} = -\alpha \vec{v}$ où $\alpha = 4 \times 10^{-3} SI$.

Le lancement est effectué depuis une altitude $z = 200 km$ avec une vitesse orthoradiale de norme $V_0 = 9000 m.s^{-1}$. Les conditions initiales sont identiques à celles de la question 3.

4.a. Etablir le système d'équations différentielles couplées vérifiées par les variables $r(t)$ et $\theta(t)$.

On donne la masse $m = 500 kg$ de la sonde.

4.b. Transformer ce système en un système d'équations du 1^{er} ordre. [Attention : $\|\vec{v}\| \neq v_r$!]

4.c. Compléter les lignes **46**, **47** et **50** du fichier ci-dessous afin de résoudre le système précédent.

```

37. m = 500 # en kg
38.
39. def F_frot(r,v):
40.     alpha = 4e-3
41.     if r > R_T + 250e3 :
42.         return 0
43.     return -alpha*v
44.
45. def F4(z,t):
46.
47.     return
48.
49. T = np.arange(0,10000,1) # création de T
50. Z = odeint(F4,...,T)
51. plt.polar(Z[:,1],Z[:,0],'-')
52. plt.grid('on')
53. plt.show()

```

4.d. Voici la courbe obtenue. On peut conclure à la lecture de la courbe que :

- Les frottements de l'atmosphère conduisent à une circularisation de sa trajectoire.
- Les frottements de l'atmosphère conduisent à une élongation de l'ellipse.
- Les frottements de l'atmosphère augmentent la vitesse du satellite.
- Super-mouton est plus fort que Bourriquet.

[une seule bonne réponse].

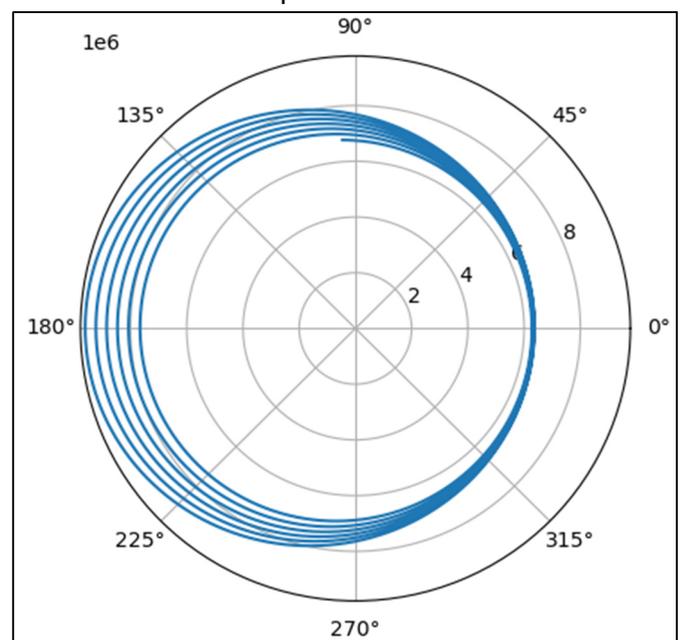


Figure 1 (questions 7 et 12)

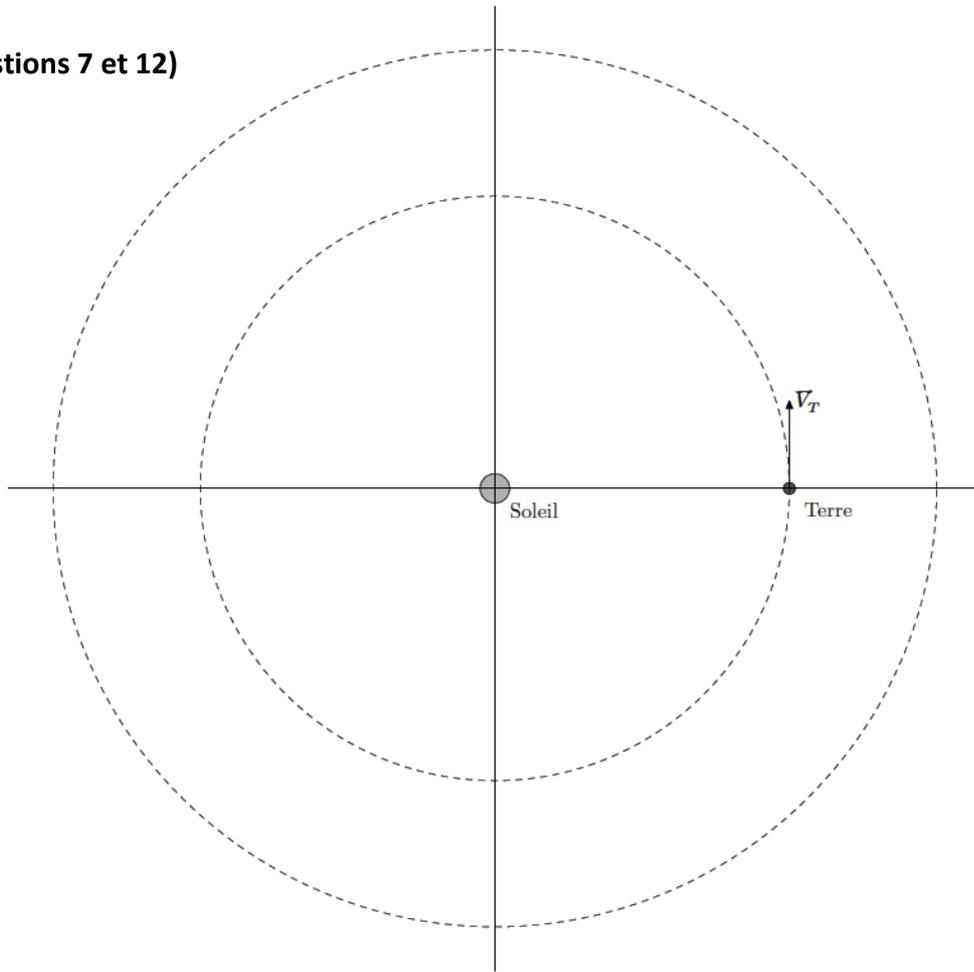


Figure 2 (questions 16 et 18)

