PCSI 1 - 22-23

DS n° 7

I. Echelle de perroquet

1. Les moments d'inertie sont additifs donc

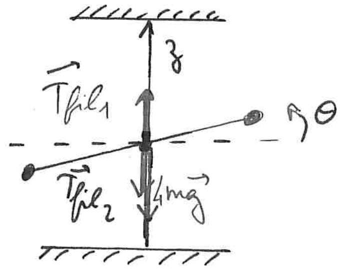
$$J_{tot} = \frac{1}{12}(2m)L^2 + 2\times\left(m\left(\frac{L}{2}\right)^2\right) = \frac{2}{3}mL^2 \qquad \boxed{k = \frac{2}{3}}$$

2. <u>Système</u> : barreau <u>Référentiel</u> : terrestre considéré galiléen

<u>Forces</u> : $4m\vec{g}$, $\vec{T}_{fil_1}$, $\vec{T}_{fil_2}$, couples de torsion : $\vec{\Gamma}_1 = -C\theta\vec{e_z}$

$\vec{\Gamma}_2 = -C\theta\vec{e_z}$.

<u>TMC / Oz fixe</u> : $\frac{dL_{Oz}}{dt} = \sum \mathcal{M}_{Oz}(\vec{F})$



avec $\mathcal{M}_{Oz}(4m\vec{g}) = 0$ car $4m\vec{g}$ coupe Oz

$\mathcal{M}_{Oz}(\vec{T}_{fil}) = 0$ car $\vec{T}_{fil_{1/2}}$ coupe Oz

D'où $\boxed{J_{tot}\ddot{\theta} = -2C\theta}$

3. Le couple de torsion est conservatif. En effet :

$\delta W(\vec{\Gamma}) = -C\theta\, d\theta = -d\mathcal{E}_p$ avec $\boxed{\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}C\theta^2.}$

(origine en $\theta = 0$)

D'où $\underline{\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}J_{tot}\dot{\theta}^2 + C\theta^2}$

En l'absence de frottement le TEM s'écrit :

$\Delta\mathcal{E}_m = W(\vec{F}_{nc}) = W(\vec{T}_{fil_{1/2}})$ avec $\mathcal{E}_{pp} = mgz_G = cte$

$= 0$ et $W(\vec{T}_{fil_{1/2}}) = 0$ car G ne bouge pas

Donc $\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0 = \frac{1}{2}J_{tot}\,2\dot{\theta}\ddot{\theta} + 2C\theta\dot{\theta}$

Après simplification par $\dot{\theta}$: $\boxed{J\ddot{\theta} + 2C\theta = 0}$

On retrouve bien l'équation différentielle donnée par le TMC

4. Oscillateur harmonique → <u>isochronisme</u> → $\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{J/2C}}$

5. On ajoute le couple de frot^t solide et le TMC /oz fixe donne : $J\ddot{\theta} = -2C\theta + \vec{\Gamma}_{frot} \cdot \vec{e_z}$

Il y aura immobilité si $\vec{\Gamma}_{frot} \cdot \vec{e_z} \leq \Gamma_0$ or le TMC pour l'immobilité donne : $0 = -2C\theta_0 + \vec{\Gamma}_{frot} \cdot \vec{e_z}$

Donc immobilité si $2C\theta_0 \leq \Gamma_0. \Rightarrow \theta_0 \leq \frac{\Gamma_0}{2C}$.

Le barreau se met en mouvement si $\boxed{\theta_0 > \frac{\Gamma_0}{2C} = \theta_{crit}}$

6. De m si $\theta_0 < 0$: pas de modification ds la mise en équation : $\vec{\Gamma}_{frot} \cdot \vec{e_z} = 2C\theta_0$ s'il y a immobilité

Donc immobilité si $\underbrace{|2C\theta_0|}_{-2C\theta_0} = \|\vec{\Gamma}_{frot}\| \leq \Gamma_0 \Rightarrow \theta_0 \geq -\frac{\Gamma_0}{2C}$

Le barreau se mettra en mouvement si $\boxed{\theta_0 < -\frac{\Gamma_0}{2C}}$

Si le pendule s'arrête dans la zone $\boxed{-\frac{\Gamma_0}{2C} \leq \theta_0 \leq \frac{\Gamma_0}{2C}}$ il reste immobile. $(-\theta_{crit} \leq \theta_0 \leq \theta_{crit})$.

7. $\theta_0 > \theta_{crit}$: le pendule se met en mouvement et $\dot{\theta} < 0$:

donc $\Gamma_{frot} = +\Gamma_0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{2C}{J}\theta = \frac{\Gamma_0}{J}$.

La solution est $\theta(t) = (\theta_0 - \theta_{crit})\cos(\omega_0 t) + \underbrace{\frac{\Gamma_0}{2C}}_{\theta_{crit}}$ (CI $\theta(0) = \theta_0$, $\dot{\theta}(0) = 0$)

avec $\omega_0^2 = 2C/J$.

. C'est une oscillation sinusoïdale autour de θ_{crit}

. Le 1^e arrêt a lieu lorsque $\dot{\theta} = -\omega_0\theta_0 \sin(\omega_0 t_1) = 0$

donc en $\omega_0 t_1 = \pi \Rightarrow \boxed{t_1 = \frac{\pi}{\omega_0} = \pi\sqrt{J/2C} = \frac{T_0}{2}}$

Le pendule s'arrête après une demi-oscillation

et $\theta(t_1) = \theta_{crit} - (\theta_0 - \theta_{crit}) = -\theta_0 + 2\theta_{crit} = \boxed{-4\theta_{crit} = \theta(t_1)}$

8. $\theta(t_1)$ n'est pas ds la zone d'arrêt donc le pendule repart avec $\dot{\theta}>0$; on pose $t'=t-t_1$:

$$J\ddot{\theta} + \frac{2C}{J}\theta = -\frac{\Gamma_0}{J} \qquad (\Gamma_{frot} = -\Gamma_0 \text{ car } \dot{\theta}>0).$$

La solution est : $\underline{\underline{\theta(t') = -\theta_{crit} + (\theta(t_1)+\theta_{crit})\cos\omega_0 t'}}$

avec un nouvel arrêt en t_2' tel que $\omega_0 t_2' = \pi$

donc $t_2' = \frac{T_0}{2}$ soit $t_2 = T_0$. et $\theta(t_2) = -\theta(t_1) - 2\theta_{crit}$
$= 2\theta_{crit}$.

9. On se retrouve ds la m situation qu'au départ avec $\theta_0 = 6\theta_{crit}$ remplacé par $\theta_0' = 2\theta_{crit}$.

$\Rightarrow$ on perd $4\theta_{crit}$ par oscillation

$\Rightarrow$ c'est une décroissance $\underline{\underline{\text{linéaire de l'amplitude}}}$.

10. C'est bien une décroissance linéaire de l'amplitude et θ_0 passe de 50° à 15° en 3 oscillations donc $\theta_{crit} = \frac{1}{4}\cdot\frac{50-15}{3} \simeq \boxed{3° = \theta_{crit}}$

11. <u>Syst</u> : barreau 1

<u>Forces:</u> $\vec{T}_{fil_1}, \vec{T}_{fil_2}, 4m\vec{g}$

$\vec{\Gamma}_{fil_1}$, $\underline{\vec{\Gamma}_{fil_2} = -C\underline{(\theta_1-\theta_2)}\vec{e_z}}$

<u>TMC /Oz fixe</u> :

la torsion du fil 2 est $\theta_1-\theta_2$

$$J\ddot{\theta}_1 = -C\theta_1 - C(\theta_1-\theta_2)$$

<u>Syst:</u> barreau 2

<u>Forces:</u> $-\vec{T}_{fil_2}, \vec{T}_{fil_3}, 4m\vec{g}$

$\vec{\Gamma}'_{fil_2} = -C(\theta_2-\theta_1)\vec{e_z}$

$\vec{\Gamma}_{fil_3} = -C\theta_2\vec{e_z}$

$$J\ddot{\theta}_2 = -C\theta_2 - C(\theta_2-\theta_1)$$

Si $\theta_1 = \theta_2$ le fil entre les 2 pendules n'est pas vrillé et le couple est nul.

$$\boxed{\begin{aligned} &(1) \quad \ddot{\theta}_1 + \frac{2C}{J}\theta_1 = \frac{C}{J}\theta_2 \\ &(2) \quad \ddot{\theta}_2 + \frac{2C}{J}\theta_2 = \frac{C}{J}\theta_1 \end{aligned}}$$

On retrouve $\boxed{\omega_0 = \sqrt{2C/J}}$ de la question 4.

12. ① + ② $\Rightarrow$ $\boxed{\ddot{s} + \frac{C}{J} s = 0}$ $\boxed{\omega_s = \sqrt{C/J} = \omega_0/\sqrt{2}}$

① - ② $\Rightarrow$ $\boxed{\ddot{d} + \frac{3C}{J} d = 0}$ $\boxed{\omega_d = \sqrt{3C/J} = \sqrt{3}\,\omega_s}$

13. $s(0) = \theta_0$ $\dot{s}(0) = 0$ $\Rightarrow$ $s(t) = \theta_0 \cos(\omega_s t)$

$d(0) = \theta_0$ $\dot{d}(0) = 0$ $\Rightarrow$ $d(t) = \theta_0 \cos(\omega_d t)$.

On retrouve θ_1 avec $\theta_1 = \frac{s+d}{2} = \frac{1}{2}\theta_0 \left(\cos(\omega_s t) + \cos(\omega_d t)\right)$

et θ_2 avec $\theta_2 = \frac{s-d}{2} = \frac{1}{2}\theta_0 \left(\cos(\omega_s t) - \cos(\omega_d t)\right)$

14. Pour que θ_1 soit sinusoïdal il faut que $d(t) = 0$

donc il faut $\theta_1(0) - \theta_2(0) = d(0) = 0$

Si $\underline{\underline{\theta_1(0) = \theta_2(0)}}$ (avec $\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0$) [conditions initiales symétriques] seul le mode propre à ω_s est présent : $\theta_1(t) = \theta_2(t) = \theta_0 \cos(\omega_s t)$

Pour le mode propre à ω_d, il faut $s(t) = 0$ donc

$\underline{\underline{\theta_1(0) = -\theta_2(0)}}$ [conditions initiales <u>anti</u>symétriques]

$\hookrightarrow$ $\theta_1(t) = -\theta_2(t) = \theta_0 \cos(\omega_d t)$.

15. <u>Système</u> : aimant = barreau n°1

<u>Forces</u>: $\vec{T}_{fil\,1}$, $\vec{T}_{fil\,2}$, $4m\vec{g}$

$\vec{\Gamma}_{fil\,1}$, $\vec{\Gamma}_{fil\,2}$, $\vec{\Gamma} = -C(\theta_1 - \theta_m \cos\omega t)\,\vec{e}_z$

Le TMC par rapport à O_3 fixe donne :

$$J\ddot{\theta}_1 = -C(\theta_1 - \theta_{em}\cos\omega t) - C(\theta_1 - \theta_2)$$

et $J\ddot{\theta}_2 = -C(\theta_2 - \theta_1) - C\theta_2$

En régime établi sinusoïdal $\theta_1 = \theta_{1m}\cos(\omega t + \varphi_1)$. On lui associe la grandeur $\mathbb{C}$ $\underline{\theta}_1 = \underbrace{\theta_{1m} e^{j\varphi_1}}_{\underline{\theta}_{1m}} e^{j\omega t}$.

De m̂ pour $\underline{\theta}_2$

Les équations deviennent : $\begin{cases} \underline{\theta}_1(-J\omega^2 + 2C) - \underline{\theta}_2 C = C\theta_{em} e^{j\omega t} \\ \underline{\theta}_2(-J\omega^2 + 2C) - \underline{\theta}_1 C = 0 \end{cases}$

en introduisant $\omega_0^2 = \frac{2C}{J}$: $\underline{\theta}_2 = \underline{\theta}_1 \cdot \frac{\frac{1}{2}\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$

et $\underline{\theta}_1 = \dfrac{\frac{1}{2}\theta_{em} e^{j\omega t}\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{\omega_0^2}{2}\cdot\frac{\omega_0^2/2}{\omega_0^2 - \omega^2}}$

Finalement : $\boxed{\underline{\theta}_1 = \dfrac{(\omega_0^2 - \omega^2)\,\omega_0^2/2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \frac{\omega_0^4}{4}}\,\theta_{em} e^{j\omega t}}$

$$\boxed{\underline{\theta}_2 = \frac{\omega_0^4/4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \omega_0^4/4}\,\theta_{em} e^{j\omega t}}$$

16. 2 fréquences de résonance pour θ_1 et pour θ_2 lorsque :

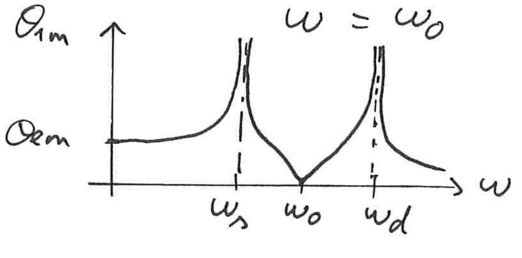
$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 = \omega_0^4/4 \quad \Rightarrow \quad \omega_0^2 - \omega^2 = \pm\frac{\omega_0^2}{2}$$

soit pour $\boxed{\omega_1^2 = \frac{1}{2}\omega_0^2 \text{ et } \omega_2^2 = \frac{3}{2}\omega_0^2}$

On retrouve ω_s et ω_d de la question 12.

17. Il y a égal^t antirésonance pour θ_1 lorsque :

$\omega = \omega_0$ (car $\underline{\theta}_1 = 0$ ds ce cas).



2 osc. couplés forment un système avec 2 pulsations de résonance et 1 pulsation d'antirésonance.

18. Même démarche avec $\vec{\Gamma}_{fil_{n-1}} = -C(\theta_n - \theta_{n-1})\vec{e_z}$
et $\vec{\Gamma}_{fil_{n+1}} = -C(\theta_n - \theta_{n+1})\vec{e_z}$.

D'où $\boxed{\ddot{\theta}_n + \frac{2C}{J}\theta_n = \frac{C}{J}(\theta_{n-1} + \theta_{n+1})}$ $\left(\omega_0^2 = \frac{2C}{J}\right)$

19. En notation complexe : $\underline{\theta}_n = \theta_m e^{j\omega t} e^{-jnka}$

D'où $(\omega_0^2 - \omega^2)\underline{\theta}_n = \frac{\omega_0^2}{2}(\underline{\theta}_{n-1} + \underline{\theta}_{n+1})$

soit : $(\omega_0^2 - \omega^2)\theta_m e^{jnka} = \frac{\omega_0^2}{2}\theta_m\left(e^{j(n-1)ka} + e^{j(n+1)ka}\right)$

$$(\omega_0^2 - \omega^2)\theta_m = \frac{\omega_0^2}{2}\theta_m \underbrace{\left(e^{-jka} + e^{jka}\right)}_{2\cos(ka).}$$

Cette équation a une solution non triviale ($\theta_m \neq 0$)

uniquement si : $\omega_0^2 - \omega^2 - 2\cos ka \, \frac{\omega_0^2}{2} = 0$.

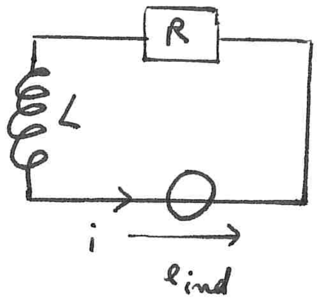
donc si : $\omega^2 = \omega_0^2 \underbrace{(1 - \cos(ka))}_{2\sin^2\frac{ka}{2}}$ $\Rightarrow \boxed{\omega = \omega_0\sqrt{2}\sin\left(\frac{ka}{2}\right)}$

Une onde sinusoïdale peut se propager le long de l'échelle de perroquet à la condition que $\omega = \sqrt{2}.\omega_0 \sin\left(\frac{kd}{2}\right)$.

cf. spé : pour définir le vecteur d'onde k, la vitesse de phase et la vitesse de groupe...

II Rails de Laplace avec bobine :

1. Le schéma électrique est :



La loi des mailles s'écrit

$$e_{ind} = Ri + L\frac{di}{dt}$$

avec $e_{ind} = -\dot{\phi}_{ext}$ et $\phi_{ext} = a x B$ ⊛

soit $\boxed{L\frac{di}{dt} + Ri = -aB\dot{x}}$

2. Le schéma mécanique est celui de l'énoncé avec i ds le sens de $\vec{e_x}$ sur le rail du bas de la figure ($\vec{S}$ m̂ sens que $\vec{B}$) ⊛

<u>Système :</u> le barreau <u>Ref :</u> t.c. galiléen

<u>Forces :</u> $\vec{F_{op}} = F_{op} \cdot \vec{e_x}$; $m\vec{g}$

$\vec{F_L} = i a B \vec{e_x}$; $\vec{R_{N_1}}$; $\vec{R_{N_2}}$

Le PFD donne selon $\vec{e_x}$: $\boxed{m\dot{v} = iaB + F_{op}}$

3. Injectons l'éq. mécanique $\left(i = \frac{m}{aB}\dot{v} - \frac{F_{op}}{aB}\right)$ ds l'éq élec :

$$\frac{Lm}{aB}\frac{d\dot{v}}{dt} - \frac{L}{aB}\underbrace{\frac{dF_{op}}{dt}}_{0} + \frac{mR}{aB}\dot{v} - \frac{RF_{op}}{aB} = -aB\dot{x}$$

soit : $\boxed{\ddot{v} + \dot{v}\frac{R}{L} + v\frac{a^2B^2}{mL} = \frac{R}{mL}.F_{op}}$

4. De la forme $\ddot{v} + \dot{v}\frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2 v = \omega_0^2 v_{lim}$

avec
$$\begin{cases} v_{lim} = \dfrac{R}{a^2B^2}F_{op} & : L.T^{-1} = \dfrac{[Ri^2]}{[a^2B^2i^2]}.F = \dfrac{F.L.T^{-1}}{F^2}.F = L.T^{-1} \\ \omega_0^2 = \dfrac{a^2B^2}{mL} & : T^{-2} = \dfrac{[a^2B^2i^2]}{M[Li^2]} = \dfrac{F^2}{M.F.L} = \dfrac{MLT^{-2}}{M.L} = T^{-2} \\ \dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{R}{L} \Rightarrow Q = \dfrac{\sqrt{L}}{R}\dfrac{aB}{\sqrt{m}} & , \dfrac{[Li^2]^{1/2}[aBi]}{[Ri^2]\,M^{1/2}} = \dfrac{[ML^2T^{-2}]^{1/2}.F}{F.L.T^{-1}.M^{1/2}} = 1 \end{cases}$$

$Q = \frac{1}{2}$ (régime critique) pour $\boxed{R = \sqrt{\frac{L}{m}}.2aB}$

5. <u>Bilan électrique :</u> $e_{ind} \cdot i = Ri^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} L i^2\right)$

La P fournie par e_{ind} est en partie dissipée par effet Joule ds R et le reste sert à faire varier l'Énergie magnétique stockée ds L.

6. <u>Bilan mécanique :</u> Th de la puissance cinétique :

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = P(\vec{F}_{op}) + P(\vec{F}_L)$$

La variation d'$\mathcal{E}_c$ du barreau est due à la puissance fournie par l'opérateur et les forces de Laplace

7. On remarque que . $e_{ind} \cdot i = -iaB\dot{x}$
. $P_p(\vec{F}_L) = iaBv$
$\Big\}$ $P_p(e_{ind}) + P_p(\vec{F}_L) = 0$

D'où le <u>bilan électromécanique.</u>

$$P(\vec{F}_{op}) = \frac{d\mathcal{E}_c}{dt} + Ri^2 + \frac{d}{dt}\mathcal{E}_{mag}$$

La puissance fournie par l'opérateur sert en partie à faire varier l'$\mathcal{E}$ cinétique du barreau et l'$\mathcal{E}$ magnétique stockée ds L. Le reste est fourni à la charge (effet Joule ici).

<u>R</u> : - les phénomènes d'induction ont disparu du bilan : ils ne sont que des intermédiaires ds la conversion $\mathcal{E}_{méca} \rightarrow \mathcal{E}_{élec}$.

- En régime établi, il ne reste que :

$P(\vec{F}_{op}) = Ri^2$ $\Rightarrow$ la conversion est totale !

III Alternateur de bicyclette

1. Modèle du solénoïde infiniment long : $\boxed{\begin{array}{l}\vec{B_{int}} = \mu_0 n i_\Sigma \vec{e_x} \\ \vec{B_{ext}} = \vec{0}\end{array}}$

2. Par définition : $L = \dfrac{\Phi_{propre}}{i_\Sigma}$ or $\Phi_{propre} = N . \pi a^2 . \mu_0 n i_\Sigma$

soit $\boxed{L = \mu_0 \pi a^2 n^2 \ell}$ $\left(n = \dfrac{N}{\ell}\right)$

3. La rotation de l'aimant crée un champ magnétique variable au sein de la bobine. Le flux de $\vec{B}$ à travers le solénoïde varie et une f.e.m induite apparaît dans le solénoïde $\Rightarrow i_\Sigma \neq 0$.

Ce courant dans le solénoïde crée un champ $\vec{B_{int}}$ qui agit sur l'aimant (force de Laplace).

4. $\Omega = \dot{\theta}$ donc $\theta = \Omega t + C$ or $\theta(0) = 0$ donc $C = 0$

$\Rightarrow \boxed{\theta = \Omega t}$.

5. $\Phi_{\Sigma \to spire} = \vec{B_{int}} \cdot \vec{S} = \mu_0 n i_\Sigma S . \cos(\Omega t)$

Or $\boxed{M = \dfrac{\Phi_{\Sigma \to spire}}{i_\Sigma} = \mu_0 n S \cos(\Omega t)}$

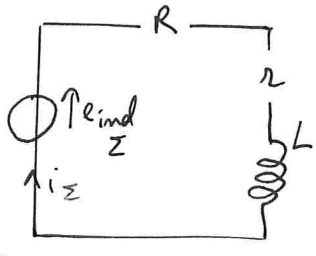
Merci Neumann !

6. On en déduit $\Phi_{spire \to \Sigma} = M i = \mu_0 n S i \cos(\Omega t)$

Or $\vec{m} = S i \vec{n}$ donc $\boxed{\Phi_{spire \to \Sigma} = \mu_0 n m \cos(\Omega t)}$

7. La loi de Faraday donne $\boxed{e_{ind_\Sigma} = -\dot{\Phi}_{spire \to \Sigma} = \mu_0 n m \Omega \sin \Omega t}$

8. Schéma électrique :



$\boxed{e_{ind_\Sigma} = R i_\Sigma + r i_\Sigma + L \dfrac{di_\Sigma}{dt}}$

En régime sinusoïdal établi : $\mu_0 n m \Omega e^{j\Omega t} \underbrace{e^{-j\frac{\pi}{2}}}_{-j} = (R + r + jL\Omega) \underline{i}_\Sigma$

$[\sin \omega t = \cos(\omega t - \pi/2)]$

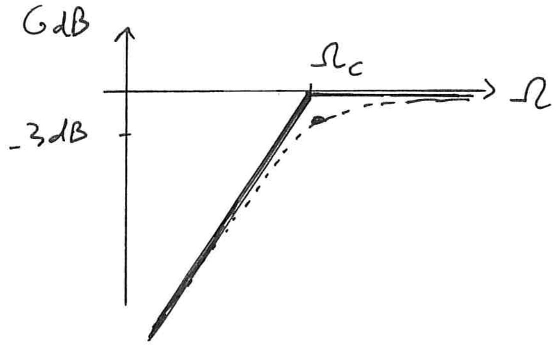
D'où $\underline{i}_\Sigma = \mu_0 n m . \dfrac{-j\Omega}{r+R+jL\Omega} e^{j\Omega t}$

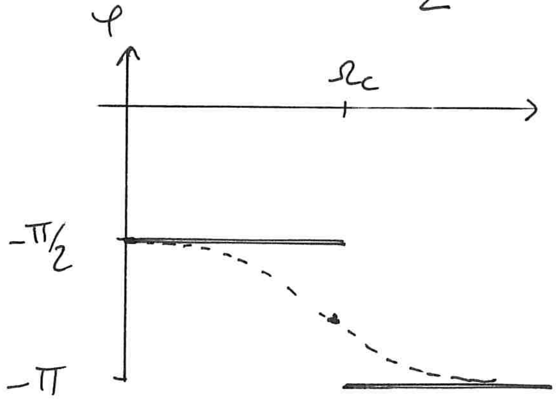
donc $\boxed{I_{\Sigma m} = \mu_0 n m . \dfrac{\Omega}{\sqrt{(r+R)^2 + L^2\Omega^2}} \quad \text{et} \quad \varphi = -\dfrac{\pi}{2} - \arctan \dfrac{L.\Omega}{r+R}}$

9. C'est un filtre passe-haut du 1^er ordre :

$I_{\Sigma m, Max} = \lim\limits_{\omega \to \infty} (I_{\Sigma m}) = \boxed{\mu_0 n m / L = I_{\Sigma m, Max}}$

10. La pulsation de coupure est $\Omega_c = \dfrac{r+R}{L}$:





11. $\langle P_{elec} \rangle = \langle P_r(R) \rangle = \frac{1}{2} R . I_{\Sigma m}^2$

donc $\boxed{\langle P_{elec} \rangle = \dfrac{1}{2} R \mu_0^2 n^2 m^2 \dfrac{\Omega^2}{(r+R)^2 + L^2\Omega^2}}$

12. $\Gamma_L = (\vec{m} \wedge \vec{B}_{int}) . \vec{e}_z = m . \mu_0 n i_\Sigma \sin(-\Omega t)$

Syst : l'aimant   Ref : terrestre considéré galiléen

Forces : poids, $\vec{R}_{axe}$, $\vec{\Gamma}_{ext}$, $\vec{\Gamma}_L$

TMC / Oz fixe : $J_{Oz} . \dot{\Omega} = \Gamma_{ext} - m \mu_0 n i_\Sigma \sin(\Omega t)$ $\quad (\Gamma_{ext} = \vec{\Gamma}_{ext} . \vec{e}_z)$

En remplaçant i_Σ : $\boxed{J_{Oz} \dot{\Omega} = \Gamma_{ext} - m \mu_0 n I_{\Sigma m} \cos(\Omega t + \varphi) \sin(\Omega t)}$

13. Pour Ω = cte : $\Gamma_{ext} = + m \mu_0 n I_{\Sigma m} \underbrace{\cos(\Omega t + \varphi) \sin \Omega t}_{\frac{1}{2}\left(\sin(2\Omega t + \varphi) - \sin(\varphi)\right)}$

D'où $\langle \Gamma_{ext} \rangle = -m \mu_0 n I_{\Sigma m} \dfrac{\sin \varphi}{2}$

$= \dfrac{1}{2} m \mu_0 n I_{\Sigma m} \cos\left(\arctan \dfrac{L\Omega}{R+r}\right) = \boxed{\dfrac{(\mu_0 n m)^2 \, \Omega (r+R)}{2\left((r+R)^2 + L^2\Omega^2\right)} = \langle \Gamma_{ext} \rangle}$

14. $$\langle P_{ext} \rangle = \langle \Gamma_{ext} \rangle \cdot \Omega = \frac{(\gamma_0 n m)^2 \Omega^2 (r+R)}{2\left((r+R)^2 + L^2\Omega^2\right)}$$

or $$\langle P_{élec} \rangle = \frac{(\gamma_0 n m)^2 \Omega^2 R}{2\left((r+R)^2 + L^2\Omega^2\right)}$$

D'où $$\langle P_{ext} \rangle = \frac{r+R}{R} \langle P_{élec} \rangle .$$

Le rendement peut se définir par :

$$\text{rendement} = \eta = \frac{\langle P_{élec} \rangle}{\langle P_{ext} \rangle} = \frac{\text{Ce qui nous intéresse}}{\text{ce qui coûte}}$$

$$\boxed{\eta = \frac{R}{r+R} < 1.}$$

15. – Ω = vitesse de rotation de l'axe de l'alternateur

$v = 15$ km/h = vitesse des points du pneu $= \frac{d_m}{2} \cdot \Omega$

$$\boxed{\Omega = \frac{2v}{d_m} = 333 \text{ rad.s}^{-1}}$$

– $P_{élec} = 3\,W = \frac{1}{2} \frac{U_{Max}^2}{R} \Rightarrow \boxed{R = \frac{U_{Max}^2}{2 . P_{élec}} = 6\ \Omega}$

– $U_{Max} = R . \underline{I}_{\Sigma Max} = \frac{R \gamma_0 n m}{L} \Rightarrow \boxed{L = \gamma_0 \frac{n m R}{U_{Max}} = 12{,}6 \text{ mH.}}$

– $\boxed{\Omega_c = \frac{r+R}{L} = 557 \text{ rad.s}^{-1}}$

. $x = \frac{\Omega}{\Omega_c} = 0{,}6$ et $|\underline{H}| \doteq \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 0{,}5 \Rightarrow U \sim \frac{U_{Max}}{2} \Rightarrow P = \frac{P_{Max}}{4}$

ce n'est pas suffisant.

Pour un bon dimensionnement, l'éclairage devrait être maximal pour Ω correspondant à 15 km.h^{-1} (vitesse d'un "touriste")

L'asymptote est pratiquement atteinte lorsque $\Omega \simeq 2\Omega_c$.

Il faudrait donc $\Omega_c \sim 150$ rad.s^{-1}.