

Samedi 15 avril 2023

## DEVOIR SURVEILLE N°7

### PHYSIQUE

*Je ne suis pas présent mais je pense bien à vous !*

**Pb 1 (34 points)** : uniquement de la mécanique - très classique avec une partie un peu délicate = partie B.

**Pb 2 (14 points)** : exercice d'induction très classique.

**Pb 3 (25 points)** : exercice d'induction un peu plus délicat mais les questions sont progressives (début = QC et beaucoup de calculs sur la fin).

*N'oubliez pas : il n'y a pas de lions à Fermat !*

*Bonne paye à tous !*

### I. Echelle de perroquet

On s'intéresse dans ce problème à la description d'une échelle de perroquet, dispositif pédagogique utilisé pour observer la propagation d'une onde unidimensionnelle (voir ci-contre).

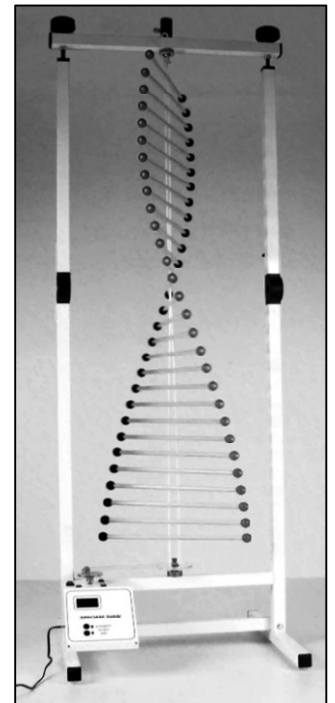
Des barreaux horizontaux régulièrement espacés sont fixés sur un fil de torsion vertical. On note  $C$  la constante de torsion du fil

Chaque barreau est composé d'une tige et de deux billes.

La tige a une longueur  $L$ , une masse  $m_{\text{tige}} = 2m$  et un moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation  $J_t = \frac{1}{12} m_{\text{tige}} L^2$ .

Les deux billes fixées aux extrémités de la tige ont une masse  $m_{\text{bille}} = m$ .

Au repos tous les barreaux sont dans un même plan vertical qui servira d'origine pour la mesure des angles de rotation des barreaux.



1. Déterminer l'expression du moment d'inertie  $J_{\text{tot}}$  d'un barreau par rapport à l'axe de rotation en fonction de  $L$  et  $m$  sous la forme  $J_{\text{tot}} = k m L^2$ . Donner la valeur de  $k$ .

### A. Oscillations d'un seul barreau sans frottement

On s'intéresse dans un premier temps aux oscillations horizontales d'une unique tige, toutes les autres ayant été retirées du fil de torsion. Voici le schéma de la situation :



2. En l'absence de frottement, établir, à l'aide du théorème du moment cinétique, l'équation différentielle vérifiée par  $\theta$ . [Attention, le barreau est soumis à deux couples de torsion, l'un de la part du fil situé au-dessus de lui, l'autre de la part du fil situé au-dessous.
3. Etablir l'expression de l'énergie potentielle associée à chaque couple de torsion et retrouver l'équation différentielle à l'aide du théorème de l'énergie mécanique en l'absence de frottement.
4. Quelle est la période propre  $T_0$  des oscillations ?

### B. Prise en compte des frottements solides

En réalisant l'expérience, on constate un amortissement des oscillations. Il est par conséquent nécessaire de prendre en compte l'existence de frottements et on propose de modéliser ceux-ci par des frottements de type frottements solides, les frottements fluides éventuels étant négligés.

Ces frottements solides sont modélisés par un couple  $\vec{\Gamma}_{frot}$  dont les propriétés sont les suivantes ( $\Gamma_0$  est une constante positive) :

le barreau reste immobile tant que  $\|\vec{\Gamma}_{frot}\| \leq \Gamma_0$

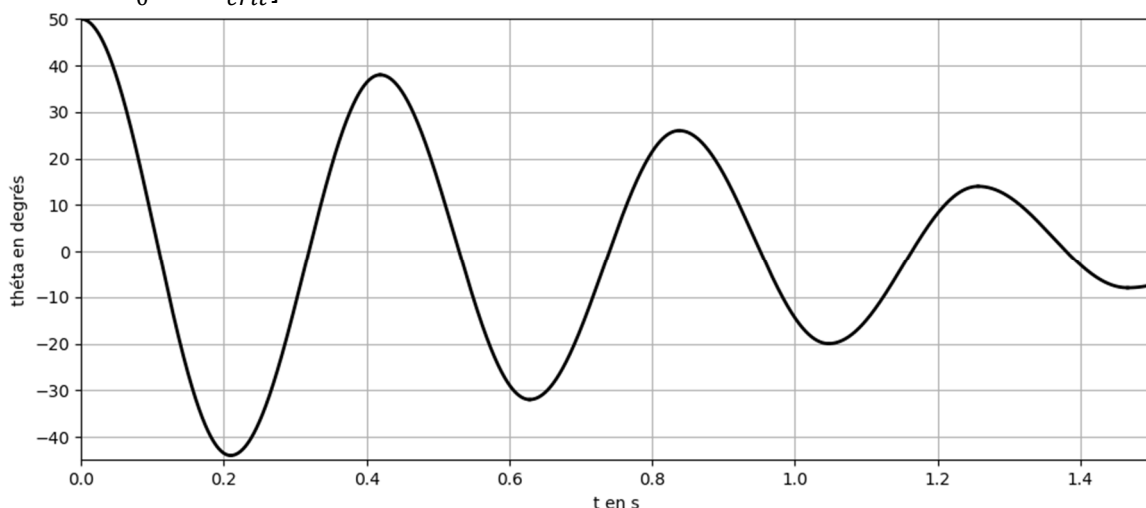
Lorsque le barreau est en mouvement :  $\vec{\Gamma}_{frot} = -\Gamma_0 \vec{e}_z$  si  $\dot{\theta} > 0$

$\vec{\Gamma}_{frot} = +\Gamma_0 \vec{e}_z$  si  $\dot{\theta} < 0$

5. On écarte le barreau d'un angle  $\theta_0 > 0$  et on le lâche sans vitesse initiale. Montrer que le barreau reste immobile si  $\theta_0 < \theta_{crit}$  où  $\theta_{crit}$  est un angle à déterminer.
6. De même pour  $\theta_0 < 0$ , montrer que le barreau reste immobile si  $-\theta_{crit} < \theta_0$ . Définir une zone d'arrêt définitif du barreau, intervalle de valeurs de  $\theta$  pour lesquelles un arrêt est définitif.

On écarte finalement le barreau d'un angle  $\theta_0 = 6\theta_{crit}$  et on le lâche sans vitesse initiale.

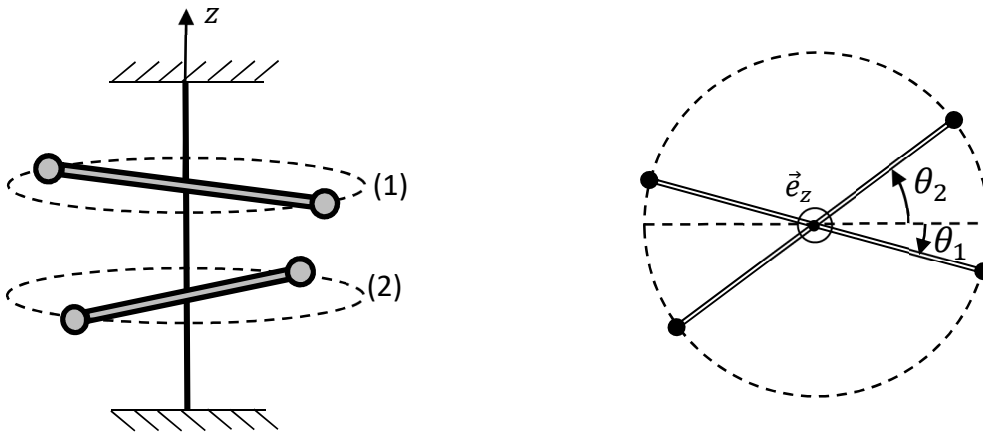
7. Etablir et résoudre l'équation différentielle vérifiée par  $\theta$  pour la première phase du mouvement entre  $t = 0$  et le premier arrêt du barreau à l'instant  $t_1$ . Exprimer  $t_1$  et  $\theta(t_1)$ .
8. Etudier la phase suivante entre  $t_1$  et l'instant d'arrêt suivant noté  $t_2$ . Exprimer  $\theta(t_2)$ .
9. En déduire la nature de la décroissance de l'amplitude des oscillations en présence d'un frottement solide.
10. La courbe suivante est-elle compatible avec un frottement solide ? Si oui déterminer  $\theta_{crit}$  [attention :  $\theta_0 \neq 6\theta_{crit}$ ].



### C. Oscillations couplées de deux barreaux

Dans cette partie, un deuxième barreau est fixé sur le fil de torsion comme présenté ci-dessous. Les frottements sont désormais négligés.

Voici le schéma de la situation :



**11.** Montrer que les équations différentielles couplées vérifiées par  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont :

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2} + \omega_0^2\theta_1 = \frac{\omega_0^2}{2}\theta_2 \quad \text{et} \quad \frac{d^2\theta_2}{dt^2} + \omega_0^2\theta_2 = \frac{\omega_0^2}{2}\theta_1$$

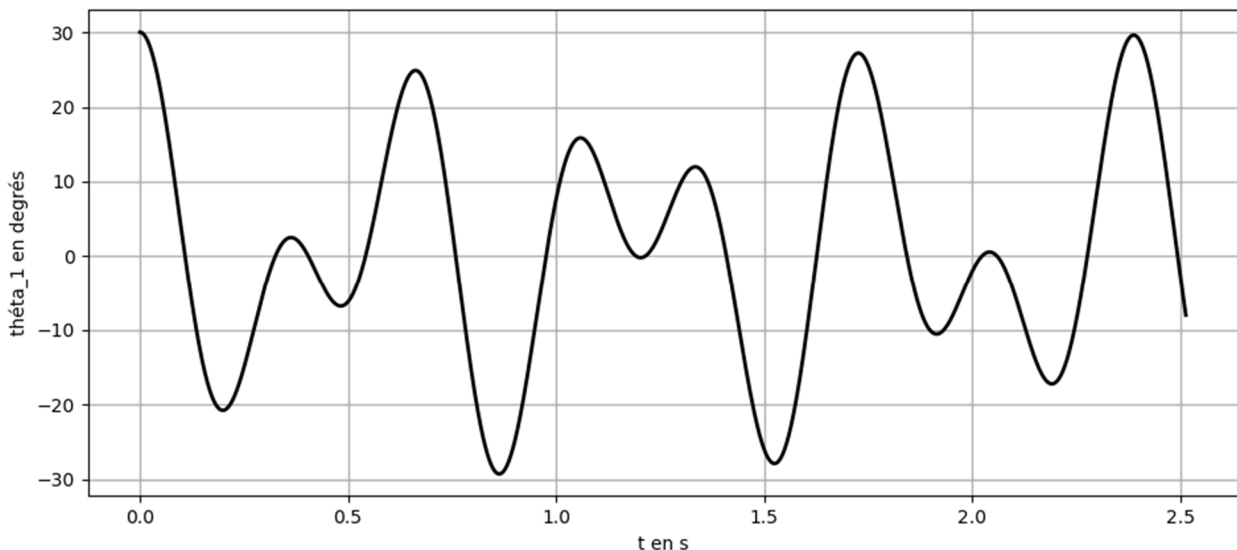
où  $\omega_0$  est une pulsation à préciser.

[Attention à l'expression du couple de torsion du fil entre les deux barreaux : vérifiez que l'expression est cohérente si  $\theta_1 = \theta_2$ ].

**12.** Etablir les deux équations différentielles non couplées sur les variables  $s = \theta_1 + \theta_2$  et  $d = \theta_1 - \theta_2$ . On introduira les pulsations  $\omega_s$  et  $\omega_d$ .

**13.** Initialement les barreaux sont lâchés sans vitesse initiale avec  $\theta_1(0) = \theta_0 \neq 0$  et  $\theta_2(0) = 0$ . Résoudre avec ces conditions les équations sur  $s$  et  $d$  puis en déduire  $\theta_1(t)$  et  $\theta_2(t)$ .

L'enregistrement de  $\theta_1(t)$  est présenté ci-dessous :



Les variations de  $\theta_1(t)$  ne sont visiblement pas sinusoïdales. Grâce à un choix judicieux des conditions initiales  $\theta_1(0)$  et  $\theta_2(0)$ , il est toutefois possible d'observer des oscillations sinusoïdales des barreaux aux pulsations  $\omega_s$  ou  $\omega_d$  appelées **modes propres** du système couplé.

**14.** En raisonnant sur les variables  $s$  et  $d$ , proposer des conditions initiales sur  $\theta_1(0)$  et  $\theta_2(0)$  permettant d'obtenir des oscillations à la pulsation  $\omega_s$  en partant des barreaux immobiles. De même avec la pulsation  $\omega_d$ .

#### D. Oscillations forcées de deux barreaux couplés

On souhaite désormais soumettre le système à une excitation sinusoïdale. Pour cela, on impose une torsion sinusoïdale d'amplitude  $\theta_m$  à l'extrémité supérieure du fil. Le couple subit par la tige la plus haute de la part de la portion de fil située au-dessus d'elle est alors donné par :

$$\vec{\Gamma} = -C(\theta_1 - \theta_m \cos(\omega t))\vec{e}_z$$

**15.** En utilisant la notation complexe, établir les expressions suivantes de  $\underline{\theta}_1$  et  $\underline{\theta}_2$  :

$$\underline{\theta}_1 = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \omega_0^4/4} \times \frac{\omega_0^2}{2} \theta_m e^{j\omega t}$$

et

$$\underline{\theta}_2 = \frac{\omega_0^2/2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \omega_0^4/4} \times \frac{\omega_0^2}{2} \theta_m e^{j\omega t}$$

**16.** Peut-on prévoir un phénomène de résonance pour  $\theta_1$  et  $\theta_2$  ? Si oui à quelle(s) pulsation(s) ?

**17.** Il peut également se produire un phénomène d'antirésonance pour  $\theta_1$  : dans ce cas la tige n°1 reste immobile (l'angle  $\theta_1$  reste nul) malgré l'excitation. Déterminer la pulsation correspondante.

#### E. Oscillations couplées de N barreaux

Pour décrire l'échelle de perroquet complète, on considère désormais que  $N$  barreaux régulièrement espacés (distance  $a$  entre les tiges) sont fixés sur le fil de torsion.

Aucune torsion sinusoïdale n'est exercée à l'extrémité supérieure du fil.

**18.** Etablir l'équation différentielle vérifiée par l'angle  $\theta_n$  du  $n^{\text{ème}}$  barreau en fonction des angles  $\theta_{n-1}$  et  $\theta_{n+1}$ .

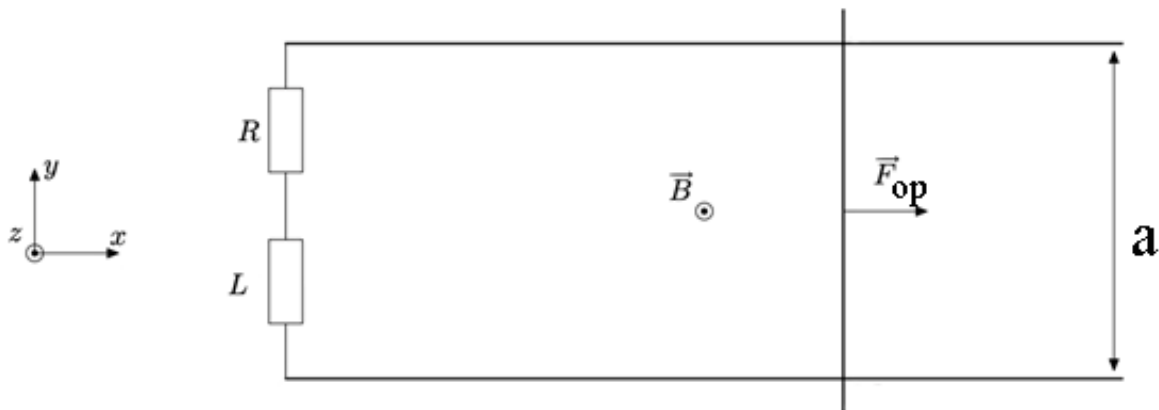
**19.** On cherche les conditions pour qu'une onde sinusoïdale puisse se propager le long de l'échelle, ce qui suppose que  $\theta_n$  puisse s'écrire sous la forme :  $\theta_n = \theta_m \cos(\omega t - n ka)$  où  $k$  est la pulsation spatiale et  $\theta_m$  est l'amplitude du mouvement commune à tous les barreaux.

En utilisant à nouveau la notation complexe, montrer qu'une telle onde peut se propager sur l'échelle de perroquet, à condition que la pulsation  $\omega$  vérifie l'égalité :

$$\omega = \sqrt{2} \omega_0 \sin\left(\frac{ka}{2}\right)$$

## II. Les rails de Laplace avec une bobine (d'après Centrale TSI 2022) :

On utilisera le modèle des rails de Laplace dans ce problème. Le dispositif est présenté ci-dessous :



Le dispositif disposé dans un plan horizontal est constitué de :

- 1- deux rails fixes conducteurs parallèles distants de  $a$  ;
- 2- une barre conductrice rectiligne mobile de masse  $m$ , pouvant se déplacer suivant la direction des deux rails fixes.
- 3- une bobine d'inductance  $L$  en série avec la résistance électrique  $R$  du circuit.

L'ensemble forme un circuit déformable, plongé dans un champ magnétique  $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$  stationnaire et uniforme.

La tige est initialement immobile et les frottements sont négligés.

À partir de l'instant  $t = 0$ , un opérateur extérieur applique à la barre une force  $\vec{F}_{op} = F_{op} \vec{e}_x$  constante sur la tige initialement immobile. On repère la position de la tige par son abscisse  $x$ .

1. Etablir l'équation électrique.
2. Etablir l'équation mécanique.
3. En déduire l'équation différentielle vérifiée par la vitesse  $\vec{v} = \dot{x} \vec{e}_x$ .
4. Introduire les paramètres pertinents, vérifier leur homogénéité et donner l'expression de  $R$  qui permet d'avoir un régime transitoire le plus court possible.
5. Faire un bilan électrique et donner la signification des termes qui apparaissent.
6. Faire un bilan mécanique et donner la signification des termes qui apparaissent.
7. Faire un bilan électromécanique dans lequel les termes d'induction n'apparaissent plus. Interpréter le bilan obtenu.

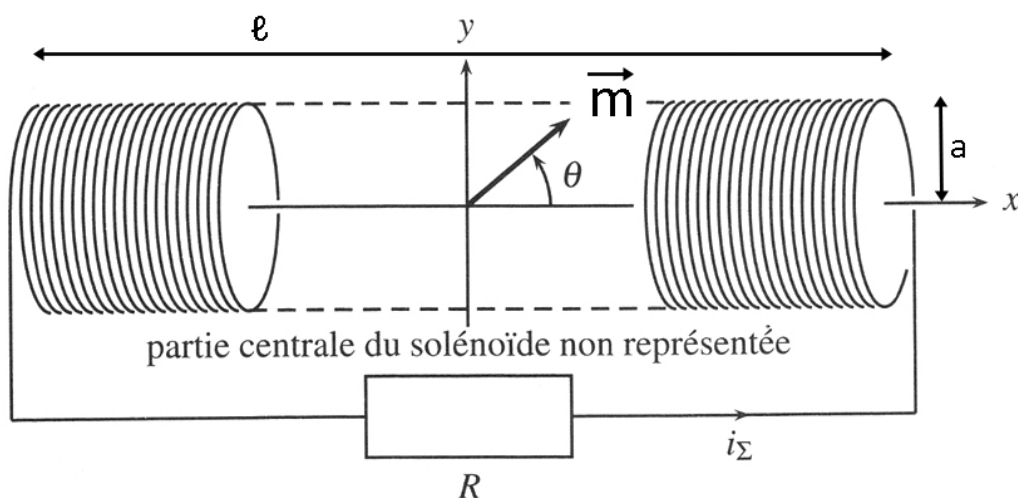
### III. Alternateur de bicyclette (d'après Centrale MP 2006) :

L'alternateur de bicyclette est un dispositif qui permet de convertir une partie de l'énergie mécanique développée par le cycliste en énergie électrique utilisée pour alimenter l'éclairage.



On peut modéliser le fonctionnement d'un alternateur de bicyclette de la façon suivante :

- 1- La rotation de la roue est utilisée pour mettre en rotation un aimant de moment magnétique  $\vec{m}$ . L'aimant, contenu dans le plan  $(Oxy)$ , tourne sans frottement autour de l'axe  $(Oz)$  à la vitesse angulaire constante  $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$ . Le moment d'inertie de l'aimant par rapport à l'axe  $(Oz)$  est noté  $J_{Oz}$ . La rotation de l'aimant est entretenue par la rotation de la roue qui applique un couple  $\vec{I}_{ext}$  à l'aimant. L'angle que fait l'aimant avec l'axe  $(Ox)$  est noté  $\theta(t)$ .
- 2- La rotation de l'aimant s'effectue au cœur d'un solénoïde  $\Sigma$  constitué d'un enroulement de  $n$  spires par unité de longueur, d'axe  $(Ox)$ , de résistance  $r$ , d'inductance propre  $L$  et parcouru par un courant d'intensité  $i_{\Sigma}(t)$ .
- 3- Le circuit est fermé sur une résistance  $R$  modélisant les lampes de la bicyclette.



1. Donner, dans le cadre du modèle du solénoïde infiniment long, l'expression du champ magnétique créé par le solénoïde en son sein ainsi qu'à l'extérieur.

2. Toujours dans le cadre du modèle précédent, donner l'expression de l'auto-inductance  $L$  en fonction du rayon  $a$  et de la longueur totale  $\ell$  du solénoïde.
3. Analyser sans calcul le fonctionnement du dispositif, en décrivant ce qui est observé au niveau de la bobine d'une part et ce qui est observé au niveau de l'aimant d'autre part.
4. L'instant origine  $t = 0$  est choisi au moment où l'aimant est orienté dans la direction l'axe (Ox), c'est à dire pour  $\theta = 0$ . En déduire le lien entre l'angle  $\theta(t)$  et la vitesse angulaire  $\Omega$ .

L'aimant, de moment magnétique  $\vec{m} = m \vec{n}$  où  $\vec{n}$  est un vecteur unitaire colinéaire à la direction de l'aimant, est assimilé à une spire fictive de vecteur surface  $\vec{S} = S \vec{n}$  parcourue par un courant d'intensité  $i(t)$ .

5. Établir l'expression du flux du champ magnétique créé par le solénoïde à travers cette spire fictive et en déduire l'expression du coefficient de mutuelle induction  $M$  entre le solénoïde et la spire fictive.
6. Déterminer l'expression du flux du champ magnétique créé par la spire fictive à travers le solénoïde puis donner la relation entre les variables  $m$ ,  $S$ , et  $i$  afin d'exprimer le flux de l'aimant à travers le solénoïde en fonction de  $\mu_0$ ,  $n$ ,  $m$  et  $\Omega$ .
7. En déduire l'expression de la fém induite dans le solénoïde par la rotation de l'aimant en fonction de  $\mu_0$ ,  $m$ ,  $n$  et  $\Omega$ .
8. En s'appuyant sur le schéma électrique équivalent, établir l'équation différentielle vérifiée par l'intensité  $i_{\Sigma}(t)$  du courant parcourant le solénoïde. En déduire l'expression de  $i_{\Sigma}(t)$  en régime sinusoïdal forcé sous la forme :

$$i_{\Sigma}(t) = I_{\Sigma m} \cos(\Omega t + \varphi)$$

où  $I_{\Sigma m}$  et  $\varphi$  sont à exprimer en fonction des données de l'énoncé.

9. Pour quelle situation limite, haute ou basse vitesse de rotation  $\Omega$ , l'amplitude  $I_{\Sigma m}$  de l'intensité induite dans la bobine est-elle maximale ? Etablir l'expression de cette amplitude maximale  $I_{\Sigma m, max}$ .
10. En déduire l'allure du diagramme de Bode asymptotique ( $G_{dB} = 20 \log\left(\frac{I_{\Sigma m}}{I_{\Sigma m, max}}\right)$  et phase) en fonction de  $\log(\Omega)$  en échelle logarithmique. On introduira une pulsation pertinente.
11. Déterminer l'expression de la puissance électrique moyenne  $\langle P_{elec} \rangle$  absorbée par les lampes de la bicyclette, modélisées par la résistance  $R$ .
12. Exprimer le couple de Laplace qui s'exerce sur l'aimant. En déduire l'équation mécanique, équation différentielle vérifiée par la vitesse angulaire  $\Omega$  de l'aimant.
13. En déduire l'expression du couple moyen  $\langle \Gamma_{ext} \rangle$  que doit exercer l'opérateur pour maintenir constante la vitesse angulaire de l'aimant. Montrer que :

$$\langle \Gamma_{ext} \rangle = \frac{(\mu_0 n m)^2}{2} \Omega \frac{(r + R)}{(R + r)^2 + (L\Omega)^2}$$

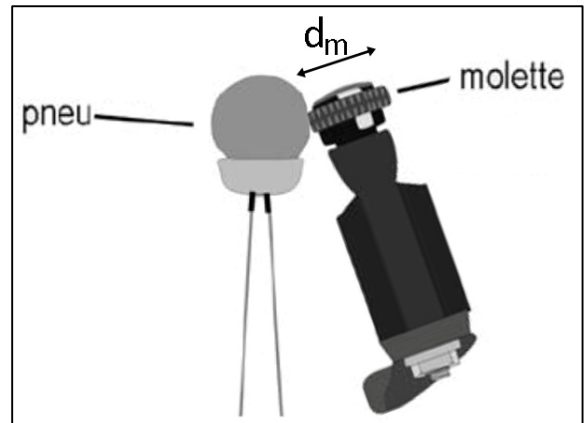
Rappels :  $\cos a \sin b = \frac{1}{2}(\sin(a + b) - \sin(a - b))$  et  $\cos(\arctan(x)) = 1/\sqrt{1 + x^2}$

14. En déduire la puissance mécanique moyenne  $\langle P_{ext} \rangle$  fournie à l'aimant par la rotation de la roue puis la comparer à la puissance électrique moyenne  $\langle P_{elec} \rangle$  reçue par la résistance  $R$  modélisant l'ampoule. Quel est le rendement  $\eta$  de l'alternateur ainsi modélisé ?

15. Applications numériques :

L'axe de rotation de l'aimant est mis en mouvement par le contact d'une molette de diamètre  $d_m = 25 \text{ mm}$  au contact du pneu.

En l'absence de glissement de la molette sur le pneu et du pneu sur le sol, on admet que les points de la molette situés à sa périphérie ont une vitesse elle-même égale à celle du vélo.



- calculer la vitesse de rotation  $\Omega$  pour un vélo roulant à  $15 \text{ km/h}$ .

L'amplitude de la tension  $u_R(t)$  aux bornes des lampes modélisées par la résistance  $R$  doit rester inférieure à  $U_{R \max} = 6 \text{ V}$ . Pour une tension aux bornes des lampes d'amplitude égale à  $U_{R \max}$  la puissance électrique moyenne recueillie est égale à  $\langle P_{elec} \rangle = 3 \text{ W}$ . Elle correspond à un éclairage maximal.

- calculer la résistance  $R$  des lampes.

Le moment magnétique de l'aimant est  $m = 4 \text{ A} \cdot \text{m}^2$ .

La bobine est constituée de  $n = 2500 \text{ spires} \cdot \text{m}^{-1}$  et possède une résistance électrique  $r = 1 \Omega$ .

Enfin la perméabilité magnétique du vide vaut  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ USI}$ .

- calculer la valeur de l'inductance  $L$  assurant que l'amplitude de la tension aux bornes des lampes ne dépasse pas  $U_{\max}$  quelle que soit la vitesse du cycliste,

- calculer la valeur du rapport  $(R + r)/L$ . Cet alternateur est-il correctement dimensionné pour un vélo destiné à un usage quotidien en ville ?

- connaissez-vous un bon cycliste qui enseigne au lycée Fermat ? Et un très bon cycliste ?