

DS n° 8

I Effusion gazeuse

1. Le libre parcours moyen ℓ d'une particule dans un fluide est la distance moyenne parcourue par la particule entre 2 collisions.

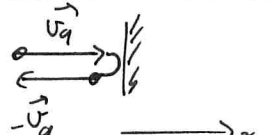
Pour un gaz à p et T ambiants : $\ell \approx 0,1 \mu\text{m}$

2. L'effusion est un phénomène macroscopiquement irréversible (cf. détente de Joule Gay-Lussac) puisque l'inhomogénéité initiale de concentrations évolue vers l'homogénéisation.

3. On sait que : $\frac{1}{2} m v_g^2 = \langle \epsilon_{\text{trans}} \rangle = \frac{3}{2} k_B T$

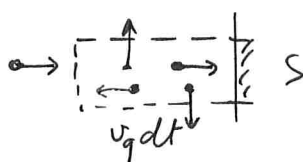
donc $v_g = \sqrt{\frac{3k_B T_0}{m}} = 1,37 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$

R: $v_g \approx v_{\text{son}}$. En effet ds l'hélium le son se propage plus vite que dans l'air. Cela donne une voix aigue à ceux qui aspirent l'hélium des ballons.

4. Pour un atome : $\vec{p}_{\text{init}} = m v_g \vec{e}_x$ et $\vec{p}_f = -m v_g \vec{e}_x$
 (l'atome rebondit sans perte d' ϵ_c)

donc $\Delta \vec{p} = -2 m v_g \vec{e}_x$

5. Sur une surface S , seuls les atomes contenus dans le cylindre de base S et de hauteur $v_g dt$ ayant leur vitesse selon $+\vec{e}_x$ ont le tps de frapper la paroi entre t et $t+dt$



soit

$dN = S v_g dt \times \frac{N}{V} \times \frac{1}{6}$ → isotropie des vitesses
volume du cylindre → densité de particules

6. Sur une durée dt , la variation de quantité de mouvement totale due aux chocs contre la portion S de la paroi est donc $d\vec{p}_{\text{gaz}} = dN \cdot \Delta\vec{p}$

Or le PFD donne: $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ donc $\vec{F}_{\text{paroi} \rightarrow \text{GP}} = \frac{dN}{dt} \cdot \Delta\vec{p}$

$$\boxed{\vec{F}_{\text{paroi} \rightarrow \text{GP}} = -\frac{SN}{3V} m v_g^2 \vec{e}_x}$$

7. D'après la 3^e loi de Newton: $\vec{F}_{\text{GP} \rightarrow \text{paroi}} = \frac{SN}{3V} m v_g^2 \vec{e}_x$

Cette force est proportionnelle à la surface:

$$P_{\text{GP}} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{e}_x}{S} = \frac{m v_g^2 \cdot N}{3V}$$

$$\boxed{P_{\text{GP}} = \frac{m v_g^2 N}{3V}}$$

8. En utilisant la relation: $\frac{1}{2} m v_g^2 = \frac{3}{2} k_B T$ on obtient: $P_{\text{GP}} \cdot V = N k_B T$

Or $N = n N_A$ et $k_B \cdot N_A = R \Rightarrow \boxed{pV = nRT}$

9. Comme lors du calcul de la pression on obtient

$$\boxed{dN_{1 \rightarrow 2} = S v_g \frac{N_1}{6V} dt}$$

$$\boxed{dN_{2 \rightarrow 1} = \frac{S v_g N_2}{6V} dt}$$

10. Par conservation de la matière: $N_1 + N_2 = N$

. Bilan pour le compartiment 1 entre t et $t+dt$:

$$N_1(t+dt) - N_1(t) = -dN_{1 \rightarrow 2} + dN_{2 \rightarrow 1}$$

. Or $N_1(t+dt) = N_1(t) + \frac{dN_1}{dt} dt$ (DL à l'ordre 1)

$$\text{donc } \dot{N}_1 = -\frac{dN_{1 \rightarrow 2}}{dt} + \frac{dN_{2 \rightarrow 1}}{dt} = \frac{S v_g}{6V} (N_2 - N_1)$$

$$\Rightarrow \dot{N}_1 + \frac{S v_g}{6V} N_1 = \frac{S v_g}{6V} N_2 = \frac{S v_g}{6V} (N - N_1)$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{N}_1 + \frac{S v_g}{3V} N_1 = \frac{S v_g}{6V} N} \quad \text{et, de } \bar{n}, \quad \boxed{\dot{N}_2 + \frac{S v_g}{3V} N_2 = \frac{S v_g}{6V} N}$$

$$\dot{N}_1 + \frac{N_1}{\tau} = \frac{N_0}{\tau} \quad (N_0 = \frac{N}{2})$$

On introduit

$$\tau = \frac{3V}{5 v_q} = 2,2 \cdot 10^5 \text{ s} = 2,5 \text{ jours.}$$

C'est très long mais le trou est très petit !

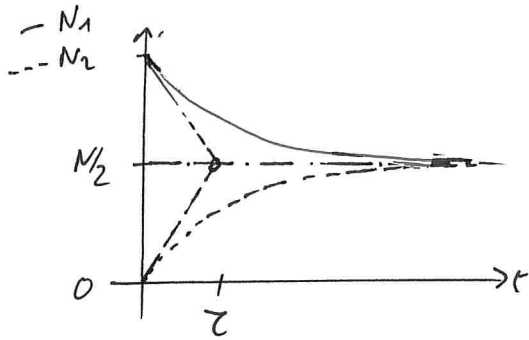
C'est le bon ordre de grandeur pour un ballon de baudouche rempli à l'hélium qui se dégonfle en quelques jours.

11. Résolution avec $N_1(0) = N$:

$$N_1(t) = \frac{N}{2} + \frac{N}{2} e^{-t/\tau}$$

et pour $N_2(0) = 0$:

$$N_2(t) = \frac{N}{2} (1 - e^{-t/\tau})$$



12. τ dépend de v_q donc de m à T fixée: $\tau \propto m^{+1/2}$

Le gaz dont les molécules sont les + légères diffusera plus vite.

Il ne faut pas attendre l'équilibre final (sinon on retrouve l'homogénéité pour les 2 gaz!).

L'effet est d'autant + marqué que $m_A \neq m_B$.

Peut être est-il utilisé pour séparer H et $D = {}^2H$.

13. τ est proportionnel à S^{-1} donc $\tau_2 = \frac{\tau_1}{h}$ ($\tau_1 = \frac{6V}{5v_q} = 2\tau$)

14. Le bilan pour (1) ne change pas: $\dot{N}_1 = \frac{N_2 - N_1}{\tau_1}$ (1)

Pour (2) il faut ajouter les fuites dans le vide: $dN = \frac{5v_q N_2 dt}{6V}$

$$\Rightarrow \dot{N}_2 = \frac{N_1 - N_2}{\tau_1} - \frac{N_2}{\tau_2} \quad (2)$$

$$\triangle N_1 + N_2 \neq N$$

$$\left(\frac{1}{\tau_2} = \frac{h}{\tau_1} \right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{N}_1 + \frac{N_1}{\tau_1} = \frac{N_2}{\tau_1} \\ \dot{N}_2 + N_2 \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{h}{\tau_1} \right) = \frac{N_1}{\tau_1} \end{cases} \quad (4)$$

15. Eliminons N_1 : ① $\dot{N}_1 = \frac{N_2 - N_1}{\tau_1}$ donc ② $\dot{N}_2 = -\dot{N}_1 - \frac{N_2}{\tau_2}$ ^{4.}

Dérivons (4): $\ddot{N}_2 + \dot{N}_2 \left(\frac{h+1}{\tau_1} \right) = \frac{\dot{N}_1}{\tau_1} = -\frac{\dot{N}_2}{\tau_1} - \frac{N_2}{\tau_2 \tau_1}$

Finalement: $\boxed{\ddot{N}_2 + \dot{N}_2 \left(\frac{h+2}{\tau_1} \right) + \frac{h}{\tau_1^2} N_2 = 0}$ $\rightarrow \frac{\tau_1}{h}$

16. Equation canonique: $\ddot{N}_2 + \frac{\omega_0}{Q} \dot{N}_2 + \omega_0^2 N_2 = 0$

donc $\omega_0^2 = \frac{h}{\tau_1^2}$ et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{2+h}{\tau_1} \Rightarrow Q = \frac{\sqrt{h}}{\tau_1} \cdot \frac{\tau_1}{2+h}$

Au final $\boxed{Q = \frac{\sqrt{h}}{2+h}}$

Montrons que (*) $\forall x > 0, f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2+x} < \frac{1}{2}$. (régime aperiodique pour $Q < \frac{1}{2}$.)

$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(2+x) - \sqrt{x}}{(2+x)^2} = 0$ par $\frac{2+x}{2} = x$ donc par $x=2$

et $f(2) = \frac{\sqrt{2}}{4} < \frac{1}{2}$ d'où $Q < \frac{1}{2}$. (les ENS aiment bien vous faire développer quelques calculs pénibles!)

Physiquement: $N_1(0) = N$ et $N_2(0) = 0$. (*) : il est + simple de montrer que $\Delta > 0$!

L'inévitabilité de l'effusion conduit à une décroissance régulière de N_1 . La pression dans (2) ne sera jamais supérieure à celle dans (1) (même sans le trou vers l'extérieure). [$h_1 = 0,1 \rightarrow Q_1 = 0,15$; $h_2 = 1 \rightarrow Q_2 = 0,33$; $h_3 = 10 \rightarrow Q = 0,26$]

17. Plus h est grand (S' élevée), plus les atomes s'échappent rapidement dans le vide donc plus rapidement

N_2 tend vers 0 \Rightarrow (a) $\Leftrightarrow h=10$

(b) $\Leftrightarrow h=1$

18. Pour $T < 1$:

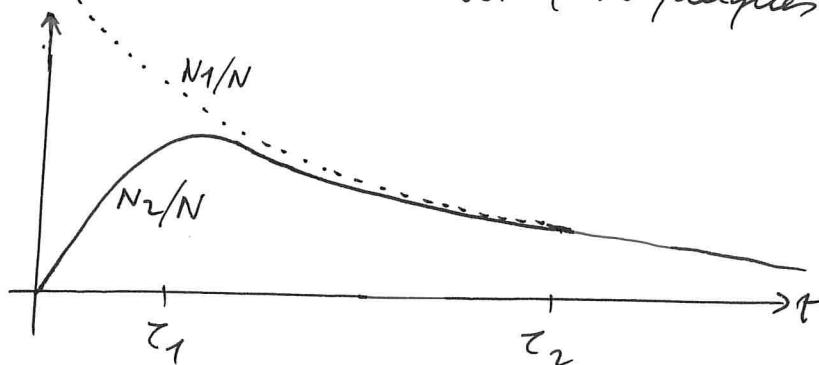
(c) $\Leftrightarrow h=0,1$.

• Pour $h=0,1$ et $h=1$: les particules s'accumulent rapidement dans (2) car l'évacuation vers le vide est lente ($S' \leq S$ et $N_2 \leq N_1$)

• Pour $h=10$: il n'y a pas d'accumulation de particules dans (2)

Elles sont immédiatement évacuées vers le vide.

19. Pour $h = 0,1$, les fuites vers l'extérieur sont lentes par rapport à l'équilibrage des pressions entre ① et ②: on évolue rapidement vers $N_1 = N_2$ (en quelques τ_1) puis N_1 et N_2 décroissent lentement (en quelques $\tau_2 = 10\tau_1$) vers 0:



20. Il suffit de mesurer la pression dans le compartiment étudié car T et V sont fixes donc n est prop. à p .
21. Il s'agit de l'étude de 2 réactions successives (d'ordre 1): $A \xrightarrow{h_1} B \xrightarrow{h_2} C$.

si $h_1 \gg h_2$ c'est l'analogue de $S' \ll S$ (c).

si $h_1 \ll h_2$ — — — de $S \gg S'$ (a)

Dans le cas (c) l'étape 2 est cinétiquement limitante
 dans le cas (a), c'est l'étape ① qui est — — —
 (et on peut appliquer l'AEQS à B).

II Etude de la bouteille Thermos d'Alice

1. Question nécessitant plusieurs étapes préalables.

Syst: l'eau et la casserole

e'i: T_1

ef: T_2

Transformation: isobare

1^{er} P: $\Delta(H + E_m) = Q + W_{elec}$ avec $W_{elec} = 0$; $\Delta E_m = 0$

D'où $Q = \Delta H = \Delta H_{eau} + \Delta H_{casserole} \approx \Delta H_{eau}$ car $C_{casserole} \ll C_{eau}$

$$Q = m c_{eau} (T_2 - T_1) = 167 \text{ kJ}$$

↖ H est extensive
↙ S

2^{er} P: $S_{cr} = \Delta S - S_{ech}$ avec $\Delta S = \Delta S_{eau} + \Delta S_{casserole} \approx \Delta S_{eau}$

et $S_{ech} = \frac{Q}{T_p} = 353 \text{ J.k}^{-1}$ " $m c_{eau} \ln \frac{T_2}{T_1}$

D'où $S_{cr} = m c_{eau} \left(\ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - \frac{T_2 - T_1}{T_p} \right) = 151 \text{ J.k}^{-1} > 0$ " 504 J.k^{-1}

$S_{cr} > 0$ donc l'évolution est irréversible. Cela est dû au gradient de température entre le système et la source de chaleur (la plaque chauffante)

2. Si T_p augmente, S_{cr} augmente car le gradient de température est de + en + fort.

3. La plaque électrique a fourni la chaleur Q à la casserole et a reçu le travail électrique $W_{elec} = P_{elec} \cdot \Delta t = 320 \text{ kJ} > Q$.

Le rendement est $r = \frac{Q}{W_{elec}} \approx 50\%$.

Le reste de l'énergie reçue sert à chauffer l'atmosphère (et la plaque ni sa température initiale est T_1 mais ce n'est pas l'hypothèse de travail ici).

4. Cf. cours. Evolution manobare avec $p_i = p_f = p_{ext} = Cte$

donne $\Delta(H + E_m) = Q + W_{elec}$ car $\Delta H = \Delta U + p_{ext} (V_f - V_i)$
et $W_p = -p_{ext} (V_f - V_i)$

5. Traitons les questions 5 et 6 ensemble:

Syst: bouteille + m_1 et m_2 T_i : T_1 et T_2 T_f : T_3

1^{er} P pour une évolution monobare: $\Delta(H + E_m) = Q + W_{\text{ext}}$

avec $\Delta E_m = 0$, $Q = 0$ et $W_{\text{ext}} = 0$

De plus, comme H est extensive: $\Delta H = \Delta H_b + \Delta H_1 + \Delta H_2$

Finalement $(C_b + m_1 c_{\text{eau}})(T_3 - T_1) + m_2 c_{\text{eau}}(T_3 - T_2) = 0$

Si $C_b = 0$ (Q5): on obtient $T_3 = \frac{m_1 T_1 + m_2 T_2}{m_1 + m_2} = 68 \text{ } ^\circ\text{C}$

6. Pour $T_3 = 63 \text{ } ^\circ\text{C}$, on obtient

soit $m_{\text{éqv}} = \frac{C_b}{c_{\text{eau}}} = 58 \text{ g}$

$$C_b = \frac{-m_2 c_{\text{eau}}(T_3 - T_2) - m_1 c_{\text{eau}}(T_3 - T_1)}{T_3 - T_1} = 243 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

7. 2^{er} P: $\Delta S = S_{\text{éch}} + S_{\text{cr}}$ avec $S_{\text{éch}} = 0$ car $Q = 0$

et $\Delta S = \Delta S_b + \Delta S_1 + \Delta S_2 = (m_{\text{éqv}} + m_1) c_{\text{eau}} \ln \frac{T_3}{T_1} + m_2 c_{\text{eau}} \ln \frac{T_3}{T_2}$

D'où $S_{\text{cr}} = \Delta S = 17,8 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} > 0$. L'évolution est irréversible car il y a des inhomogénéités de température.

8. Syst: bouteille + m

Bilan d'énergie entre t et $t + dt$: $\frac{d(E_m + H)}{dt} = P_{\text{th}} + P_{\text{élec}}$

avec $dH = dH_b + dH_{\text{eau}} = (m + m_{\text{éqv}}) \cdot c_{\text{eau}} \cdot dT$, et $P_{\text{élec}} = 0$

$dE_m = 0$ et $P_{\text{th}} = -P_{\text{perdue}} = -hS(T - T_1)$

D'où $\frac{dT}{dt} + \frac{hS}{(m + m_{\text{éqv}}) c_{\text{eau}}} T = \frac{hS}{(m + m_{\text{éqv}}) c_{\text{eau}}} T_1$ $\tau = \frac{(m + m_{\text{éqv}}) c_{\text{eau}}}{hS}$

et $T_{\text{inf}} = T_1$. Au bout de quelques τ le thé est à l'équilibre thermique avec la pièce.

On espère que τ est assez grand.

9. Résolution immédiate: $T = (T_0 - T_1) e^{-t/\tau} + T_1$

$$10. \quad T(t=10') = T_0 - \Delta T = T_1 + (T_0 - T_1) e^{-t_1/\tau}$$

$$D'au : \quad \Delta T = (T_0 - T_1) (1 - e^{-t_1/\tau})$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{\Delta T}{(T_0 - T_1)} = e^{-t_1/\tau} \Rightarrow t_1 = -\tau \ln\left(\frac{T_0 - T_1 - \Delta T}{T_0 - T_1}\right)$$

$$D'au \quad \tau = \frac{-t_1}{\ln\left(\frac{T_0 - T_1 - \Delta T}{T_0 - T_1}\right)} = 13,7 \cdot 10^3 \text{ s} \approx 3^h 48'$$

$$11. \quad T(t_f) = T_f = T_1 + (T_0 - T_1) e^{-t_f/\tau}$$

$$\Rightarrow t_f = -\tau \times \ln\left(\frac{T_f - T_1}{T_0 - T_1}\right) = 17,2 \cdot 10^3 \text{ s} \approx 4^h 46'$$

12. Syst: bouteille + eau (thi) éi: $90^\circ = T_0$ éf: $40^\circ \text{C} = T_f$

évolution: isobare; $1^{er} P. \Rightarrow Q = \Delta H - \Delta E_m - W_{elec}$

$$Q = (m + m_{equiv}) c_{eau} (T_f - T_0)$$

$$2^{er} P: S_{ca} = \Delta S - S_{eich}$$

$$\text{avec } \Delta S = (m + m_{equiv}) c_{eau} \ln \frac{T_f}{T_0} \text{ et } S_{eich} = \frac{Q}{T_1}$$

($T_{atm} = T_1$)

$$D'au \quad S_{ca} = (m + m_{equiv}) c_{eau} \ln \frac{T_f}{T_0} - (m + m_{equiv}) c_{eau} \left(\frac{T_f - T_0}{T_1} \right) = 52,5 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} > 0.$$

$$13. \quad V = \pi R^2 \times H$$

$$S_{tot} = 2 \times \pi R^2 + 2\pi R \times H$$

$$14. \quad S_{tot} = 2\pi R^2 + 2\pi R \times \frac{V}{\pi R^2} = 2\pi R^2 + 2 \frac{V}{R}$$

$$\frac{dS_{tot}}{dR} = 0 \Rightarrow 4\pi R_{opt} - \frac{2V}{R_{opt}^2} = 0 \Rightarrow R_{opt}^3 = \frac{V}{2\pi} = 4,3 \text{ cm}$$

$$\text{et } H_{opt} = \frac{V}{\pi R_{opt}^2} = \frac{V (2\pi)^{2/3}}{\pi \cdot V^{2/3}} = V^{1/3} \cdot 2^{2/3} \cdot \pi^{-1/3}$$

$$H = 8,6 \text{ cm.}$$

On voit sur les photos que ces proportions ne sont pas respectées: le "beau" l'emporte sur la science!

III Petit cycle moteur avec polytropique

1. Système : n moles de GP ($n = \frac{p_A V_A}{R T_A} = 0,20$ mole)

évolution de A à B: adiabatique + réversible donc $q = 0$ et

Les 3 hypothèses de Laplace sont réunies: $\left\{ \begin{array}{l} p \cdot V^\gamma = cte \\ T \cdot V^{\gamma-1} = cte \end{array} \right.$

$$\text{D'où : } \boxed{\begin{array}{l} p_B = p_A \cdot \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^\gamma = 9,5 \text{ bar} \\ T_B = T_A \cdot \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma-1} = 571 \text{ K} \end{array}}$$

2. 1^{er} P entre A et B: $\Delta(U + E_m)_{AB} = Q_{AB} + W_{P,AB} + W_{elec,AB}$
(et 3)

avec $W_{elec} = 0$, $Q = 0$, $\Delta E_m = 0 \Rightarrow \Delta U_{AB} = W_{P,AB}$

$$\text{or } \boxed{\Delta U_{AB} = n \frac{R}{\gamma-1} (T_B - T_A) = 1,13 \text{ kJ.}} \quad (n = \frac{p_A V_A}{R T_A} = 0,20 \text{ mol})$$

3. $\boxed{W_{AB} = \Delta U_{AB}}$ d'après le 1^{er} P.
 $W_{AB} > 0$ car le gaz subit une compression.

4. $T_c = T_1 = 900 \text{ K}$ et $p_c = p_B$ puisque l'évolution est isobare

Enfinement la cons. de la mat. donne: $V_c = V_B \cdot \frac{p_B T_c}{p_c T_B}$

$$\boxed{\begin{array}{l} p_c = p_B = 9,5 \text{ bar} \\ V_c = V_B \cdot \frac{T_c}{T_B} = 1,6 \text{ L} \end{array}}$$

$$5. W_{BC} = \int_B^C -p_{ex} dV = \boxed{-p_B (V_c - V_B) = -0,57 \text{ kJ} = W_{BC}}$$

6. 1^{er} P entre B et C: $\Delta(H + E_m)_{BC} = Q + W_{elec}$
(isobare)

or $\Delta E_m = 0$ et $W_{elec} = 0$ donc

$$\boxed{\begin{array}{l} Q_{BC} = \Delta H_{BC} = n \frac{\gamma R}{\gamma-1} (T_c - T_B) \\ = 1,9 \text{ kJ} \end{array}}$$

7. 2^{er} P: $S_{cr,BC} = \Delta S_{BC} - \frac{Q_{BC}}{T_1}$

$$\text{avec } \Delta S_{BC} = n \frac{R}{\gamma-1} \ln \left(\frac{p_c V_c^\gamma}{p_B V_B^\gamma} \right) = 2,65 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} S_{cr,BC} = n \frac{R \gamma}{\gamma-1} \ln \left(\frac{V_c}{V_B} \right) - \frac{\Delta H_{BC}}{T_c} \\ = 0,52 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} > 0 \end{array}}$$

8. Entre C et A: $P_A V_A^{\gamma} = P_C V_C^{\gamma}$

donc $\left(\frac{V_C}{V_A}\right)^{\gamma} = \frac{P_A}{P_C}$ d'où $\ln \frac{V_C}{V_A} = \ln \frac{P_A}{P_C}$

$$\gamma = \frac{\ln(P_A/P_C)}{\ln(V_C/V_A)} = 1,95$$

9. $W_{CA} = \int_C^A -P_{ex} dV = - \int_C^A p dV$ car l'évolution est quasistatique et donc $P_{ex} = p$.

$$= - \int_C^A cte \frac{dV}{V^{\gamma}} = - cte \cdot \left[\frac{V^{-\gamma+1}}{-\gamma+1} \right]_C^A = - \frac{cte}{1-\gamma} (V_A^{1-\gamma} - V_C^{1-\gamma})$$

or $cte = P_A \cdot V_A^{\gamma}$
 $= P_C V_C^{\gamma}$

$$W_{CA} = - \frac{1}{1-\gamma} (P_A V_A - P_C V_C) = \frac{nR}{\gamma-1} (T_A - T_C)$$

$$= -1,05 \text{ kJ. (détente du GP)}$$

10. 1^{er} P entre C et A: $Q_{CA} = \Delta U_{CA} - W_{CA}$ car $\Delta E_m = 0$

et $W_{elec} = 0$

Finalemant

$$Q_{CA} = \frac{nR}{\gamma-1} (T_A - T_C) - \frac{nR}{\gamma-1} (T_A - T_C)$$

$$= -1,44 \text{ kJ.}$$

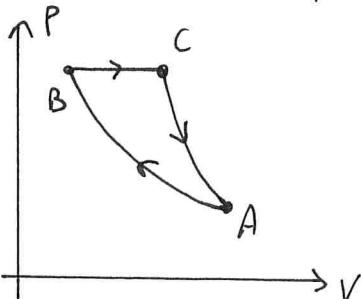
R: n γ = γ on a
 lien $\alpha_{CA} = 0$
 (adiab.)

11. 2^{er} P: $S_{CA} = \Delta S_{CA} - \frac{Q_{CA}}{T_2}$ avec $\Delta S_{CA} = \frac{nR}{\gamma-1} \ln \left(\frac{P_A \cdot T_A^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{P_C \cdot T_C^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}} \right)$

$$S_{CA} = 2,1 \text{ J.K}^{-1} > 0$$

$$= -2,65 \text{ J.K}^{-1}$$

12. Eq. de l'évolution polytropique: $p = \frac{cte}{V^{\gamma}}$ → hyperbole très pentue avec $\gamma = 1,95$



13. $\eta = \frac{-W_{tot}}{Q_{BC}} = \frac{-0,49}{1,9} = 26\%$