Samedi 27 mai 2023

DEVOIR SURVEILLE N°8
PHYSIQUE

I. Effusion gazeuse (d'après ENS PC 2023) **:**

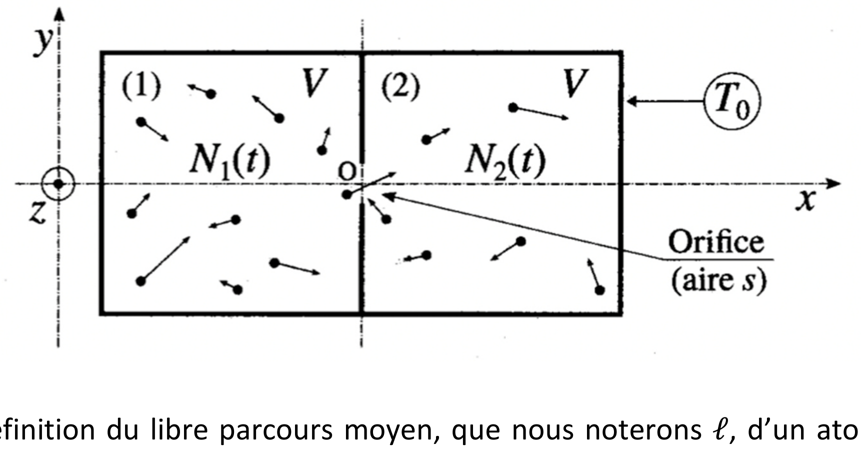
Dans ce problème, nous nous proposons d'étudier le phénomène d'effusion gazeuse, qui décrit l'échappement d'un gaz à travers un orifice percé dans la paroi de l'enceinte contenant ce gaz.

L'étude sera conduite dans le cadre suivant :

- la pesanteur n'est pas prise en compte ;
- le gaz est supposé parfait et monoatomique composé d'atomes d'hélium ;
- sa température reste fixée par un thermostat à la température $T_0 = 300\ K$;
- ses évolutions sont considérées comme quasi-statiques. Cela signifie, en particulier, que les grandeurs thermodynamiques intensives se rapportant au gaz seront considérées, à tout instant, comme uniformes dans chacune des enceintes.
- le volume de chaque enceinte est : $V = 1{,}0\ L$
- la constante de Boltzmann vaut : $k_B = 1{,}38 \times 10^{-23}\ J.K^{-1}$
- la masse d'un atome d'hélium est : $m = 6{,}64 \times 10^{-27} kg$

A. Considérations qualitatives préliminaires

Nous considérons deux enceintes cubiques identiques, de volume V, pouvant échanger des atomes de gaz à travers un orifice circulaire d'aire S percé dans leur paroi commune. Les enceintes sont en contact avec un thermostat qui fixe leur température et celle du gaz à la température T_0. Ce système est illustré sur la figure ci-dessous à un instant donné. Chacun des atomes (représentés par des points) est alors animé d'une certaine vitesse représentée par une flèche.



1. Rappeler la définition du libre parcours moyen, que nous noterons ℓ, d'un atome (ou d'une molécule) dans un gaz. Donner son ordre de grandeur pour un atome dans un gaz à température et pression ambiante.
2. L'effusion étudiée est-elle une évolution réversible ou irréversible ? Justifier en quelques mots.
3. Donner la relation entre la vitesse quadratique des atomes, notée v_q, et la température du gaz T_0. Faire l'A.N. en calculant v_q.

B. Calcul initial de la pression dans l'enceinte

L'espace est rapporté au trièdre de vecteurs unitaires ($\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$, $\vec{u}_z$) où $\vec{u}_x$ est la normale au trou orientée du compartiment (1) vers le compartiment (2) (voir figure ci-dessus).

On adopte le modèle simplifié suivant :

- les vitesses des atomes ne sont orientées que selon $\pm\vec{u}_x$, $\pm\vec{u}_y$, $\pm\vec{u}_z$ avec une norme identique et égale à la vitesse quadratique moyenne v_q,
- la répartition de ces six directions est isotrope, et, statistiquement, seule une fraction 1/6 des atomes se dirige selon chacune d'entre elles.

Dans le cadre de ce modèle, on souhaite établir l'expression de la pression exercée par le gaz sur la paroi avant l'ouverture de l'orifice. Le nombre d'atomes dans le compartiment (1) est alors N.

4. Etudier le choc d'un atome sur la paroi et en déduire la variation de quantité de mouvement $\Delta\vec{p}$ qu'il subit.

5. Déterminer le nombre de chocs dN qui se produisent sur une petite surface S sur une durée dt.

6. A l'aide du principe fondamental de la dynamique appliqué au gaz déterminer la force qu'il subit de la part de cette portion S de la paroi.

7. En déduire l'expression de la pression exercée par le gaz sur la paroi.

8. Retrouver l'équation d'état macroscopique du gaz parfait.

C. Dynamique d'échange d'atomes

Dans la suite, nous noterons $N_1(t)$ et $N_2(t)$ les nombres d'atomes occupant respectivement les enceintes (1) et (2) à l'instant t. La situation initiale est telle que $N_1(t=0) = N$ et $N_2(t=0) = 0$.

A l'instant $t = 0$, l'orifice entre les deux compartiments est ouvert.

9. À partir d'un instant t quelconque et pendant une durée dt, exprimer le nombre $dN_{1\to2}$ de molécules du compartiment (1) traversant la surface S vers le compartiment (2). Exprimer de même le nombre $dN_{2\to1}$ de molécules du compartiment (2) traversant, pendant la même durée dt, la surface S vers le compartiment (1).

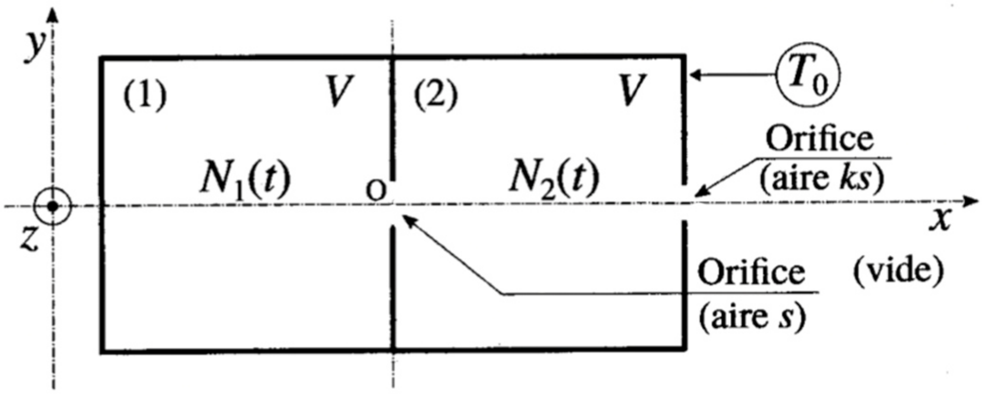
10. Établir les équations différentielles vérifiées par les nombres d'atomes $N_1(t)$ et $N_2(t)$ contenus dans chacune des enceintes. En déduire l'expression de la constante de temps τ associée à cette évolution. Faire l'A.N. pour $S = 10\ \mu m^2$.

11. Exprimer l'évolution des quantités d'atomes $N_1(t)$ et $N_2(t)$ et tracer l'allure de leurs variations.

12. Il est possible de tirer parti du phénomène d'effusion gazeuse pour isoler, au moins partiellement, un composant particulier d'un gaz. Pour illustrer cette application, nous supposons que le gaz est formé de deux types d'atomes A et B et qu'il est initialement entièrement contenu dans l'enceinte (1). L'objectif est de recueillir, dans les meilleures conditions, un gaz enrichi (ou appauvri) de l'un de ses composants. Expliquer sur quelle propriété du phénomène d'effusion cette application repose. Indiquer dans quelle situation concrète cette technique de séparation a été, ou peut être, utilisée.

D. Système ouvert sur le vide

La situation est la même que celle décrite dans l'étude précédente à la différence près que l'enceinte (2) est désormais percée d'un second trou (se reporter à la figure ci-dessous). Ce trou, d'aire $S' = kS$, donne sur le milieu extérieur que nous supposons être le vide. Nous noterons τ_1 la constante de temps faisant intervenir l'aire S du trou de communication entre les deux enceintes (identiques) et τ_2 celle faisant intervenir l'aire kS.



13. Exprimer τ_2 en fonction de τ_1 et k.

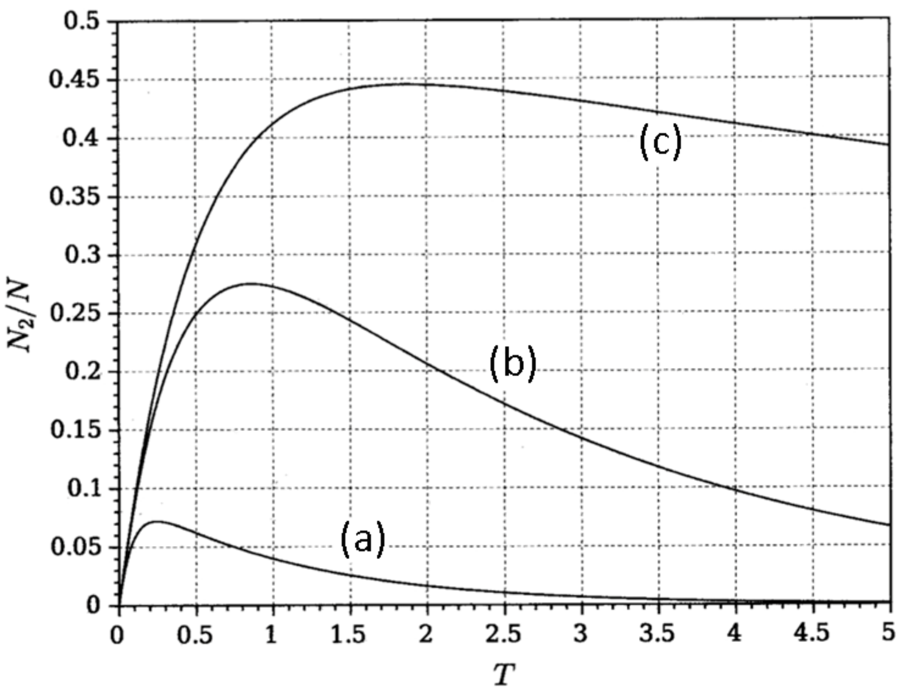
14. Établir le système d'équations différentielles vérifié par $N_1(t)$ et $N_2(t)$ en fonction de τ_1 et k.

15. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par $N_2(t)$ en fonction de τ_1 et k s'écrit :

$$\ddot{N}_2 + \frac{2+k}{\tau_1}\ \dot{N}_2 + \frac{k}{\tau_1^2}\ N_2 = 0$$

16. Exprimer le facteur de qualité Q associé à cette équation différentielle. Montrer que le régime est forcément apériodique et le justifier sur la base d'arguments physiques.

La figure ci-dessous représente l'évolution du rapport N_2/N vis-à-vis de la variable $T = t/\tau_1$ (temps réduit), pour trois valeurs $k_1 = 0{,}1$; $k_2 = 1$ et $k_3 = 10$ du paramètre k.



17. Indiquer la correspondance entre les références (a), (b) et (c) des tracés et les trois valeurs de k en la justifiant.

18. Analyser le comportement de ces évolutions aux temps courts ($T < 1$) et interpréter ce résultat.

19. Nous considérons la situation pour laquelle $k = k_1 = 0{,}1$. Représenter qualitativement l'allure de l'évolution de N_1/N vis-à-vis de la variable T, en correspondance avec celle de N_2/N. Aucun calcul n'est à effectuer mais il faut rédiger pour justifier l'allure tracée.

20. Indiquer comment l'évolution temporelle du nombre N_i d'atomes dans une enceinte (i) peut être suivie expérimentalement.

21. Proposer un problème de chimie analogue à celui étudié dans cette partie (deux enceintes et deux trous).

II. Etude de la bouteille Thermos d'Alice :

On souhaite étudier la bouteille Thermos d'Alice et son intérêt pour conserver du thé à température élevée.

A. Préparation du thé

Alice prépare son thé en faisant chauffer de l'eau sur une plaque chauffante dont la température est $T_p = 200°C$. Elle place une masse $m = 500\ g$ d'eau à la température initiale $T_1 = 20°C$ sur la plaque chauffante et attend l'apparition des premières bulles de vapeur qui apparaissent lorsque la température de l'eau atteint $T_2 = 100\ °C$.

On donne la capacité thermique massique de l'eau : $c_{eau} = 4{,}18\ kJ.K^{-1}.kg^{-1}$.

On néglige la capacité thermique de la casserole devant celle de l'eau.

1. Déterminer l'entropie créée S_{cr} au cours de ce chauffage et faire l'A.N.

2. Comment évolue S_{cr} quand T_p augmente ? Commenter.

3. Le constructeur de la plaque électrique précise que la consommation électrique est de 1 kW. Sachant que la transformation étudiée a duré $\Delta t = 5\min 20\ s$, quel est le rendement de l'opération ?

B. Caractérisation de la bouteille Thermos

La bouteille Thermos peut être considérée comme un calorimètre.

4. Montrer que pour un système subissant une transformation monobare avec $p_{init} = p_{final} = p_{ext}$ on peut écrire le premier principe sous la forme :

$$\Delta(H + E_m) = Q + W_{élec}$$

Afin de déterminer la capacité thermique du la bouteille, on place une masse $m_1 = 200\ g$ d'eau à température ambiante dans la bouteille et on relève la température $T_1 = 20°C$.

On ajoute ensuite une masse $m_2 = 300\ g$ d'eau à la température $T_2 = 100°C$ dans la bouteille, on attend l'équilibre thermique et on mesure $T_3 = 63°C$.

Les manipulations sont réalisées suffisamment vite pour que les pertes thermiques avec l'atmosphère soient négligeables.

5. Quelle aurait été la valeur de T_3 si la capacité thermique de la bouteille avait été nulle ?

6. Déterminer la valeur de la capacité thermique C_b de la bouteille Thermos utilisée et sa masse d'eau équivalente m_{eqv}.

Pour la suite on prendra : $\boldsymbol{m_{eqv} = 60\ g}$.

7. Déterminer l'entropie créée S_{cr} lors de cette expérience. Faire l'A.N.

C. Caractérisation de la bouteille Thermos

Alice remplie sa bouteille avec une masse $m = 500\ g$ de thé (de même capacité thermique que l'eau) à la température $T_0 = 90°C$ et constate qu'au cours de la journée la température $T(t)$ de son thé diminue progressivement.

On interprète cette variation de température par l'existence de pertes thermiques à travers la surface de la bouteille. Ces pertes sont modélisées par une puissance thermique **perdue** par la bouteille : $P_{perdue} = k\ S\ (T(t) - T_{ext})$ où k est une constante positive et où S désigne l'aire totale de la surface extérieure de la bouteille.

La température T_{ext} est celle de l'atmosphère de la pièce (salle DE04) : $T_{ext} = T_1 = 20°C$.

8. Établir l'équation différentielle régissant l'évolution de la température du thé :

$$\frac{dT}{dt} + \frac{T}{\tau} = \frac{T_{inf}}{\tau}$$

et exprimer τ et T_{inf} en fonction des données de l'énoncé.

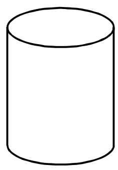
9. Résoudre l'équation différentielle précédente en prenant $T(t = 0) = T_0 = 90°C$.

10. On a mesuré une baisse de température de $\Delta T = 3°C$ pendant les 10 premières minutes. En déduire la valeur numérique de τ.

11. Au bout de combien de temps le thé d'Alice atteindra-t-il la température $T_f = 40°C$?

12. Déterminer l'entropie créée S_{cr} entre l'instant $t = 0$ et l'instant où la température du thé a atteint T_f. Faire l'A.N.

D. Conception d'une bouteille Thermos cylindrique.



On souhaite améliorer la géométrie de la bouteille pour minimiser les pertes thermiques avec l'atmosphère.

La forme de la bouteille est cylindrique de rayon R et de hauteur H.

13. Exprimer le volume V et l'aire S_{tot} de toutes les surfaces de la bouteille (la surface latérale et les deux disques des extrémités) en fonction de R et de H.

14. En déduire l'expression de la surface totale S_{tot} de la bouteille en fonction de V et R et montrer qu'à volume V fixé il existe une valeur optimale du rayon R_{op} qui assure une surface totale S_{tot} minimale (et donc des pertes thermiques minimales). En déduire R_{opt} et H pour un volume de $V = 500\ mL$.

Bouteilles Thermos avec affichage de la température !

III. Petit cycle moteur avec une évolution polytropique

Pour modéliser le fonctionnement d'un moteur on considère n moles de gaz parfait caractérisé par γ = 1,40 évoluant dans un piston et soumis aux transformations suivantes selon un cycle ABCA :

- Etat A : $p_A = 1{,}0\ bar$, $V_A = 5{,}0\ L$ et $T_A = 300\ K$
- Evolution adiabatique réversible vers l'état B
- Etat B : $V_B = V_A/5$, p_B, et T_B
- Evolution isobare vers l'état C au contact d'un thermostat à la température $T_1 = 900\ K$
- Etat C : $T_C = T_1$, V_C et p_C
- Retour vers l'état A au contact d'un thermostat à la température $T_2 = T_A = 300\ K$ selon une évolution **polytropique**.

Une évolution **polytropique** est une évolution quasi-statique d'un gaz durant laquelle : $p.V^k = Cte$ où le facteur k est une constante positive.

Cette transformation permet d'englober de nombreuses autres transformations :

- si k = 0, l'évolution est isobare,
- si k = 1, l'évolution est isotherme,
- si k = γ l'évolution est adiabatique
- si k→∞, l'évolution est isochore.

Mais bien sûr k peut également prendre n'importe quelle valeur positive différente des exemples ci-dessus.

On donne : $R = 8{,}314\ J.K^{-1}.mol^{-1}$.

1. Déterminer l'état B et faire les A.N. pour p_B et T_B.

2. Déterminer la variation d'énergie interne $\Delta_{AB}U$ du gaz parfait lors de l'évolution de A à B. Faire l'A.N.

3. Déterminer le travail W_{AB} reçu par le gaz lors de cette évolution. Faire l'A.N.

4. Déterminer l'état C et faire les A.N. pour p_C et V_C.

5. Déterminer le travail W_{BC} reçu par le gaz lors de cette évolution. Faire l'A.N.

6. Déterminer la chaleur Q_{BC} reçue par le gaz lors de cette évolution. Faire l'A.N.

7. Déterminer l'entropie créée $S_{cr,BC}$ au cours de cette étape. Faire l'A.N.

8. Déterminer la valeur de k lors de l'évolution polytropique entre C et A.

9. Déterminer le travail W_{CA} reçu par le gaz lors de cette évolution. Faire l'A.N.

10. Déterminer la chaleur Q_{CA} reçue par le gaz lors de cette évolution. Faire l'A.N.

11. Déterminer l'entropie créée $S_{cr,CA}$ au cours de cette étape. Faire l'A.N.

12. Tracer l'allure du cycle dans le diagramme de Clapeyron.

13. On définit le rendement du moteur par le rapport : $r = -W_{tot}/Q_{BC}$ où W_{tot} est le travail total reçu par le gaz sur un cycle. Calculer la valeur du rendement de ce cycle.