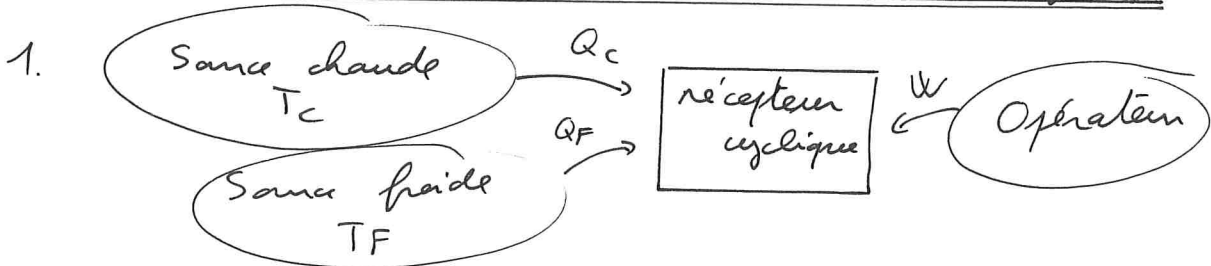


DS n°9

I Etude thermodynamique d'une chambre froide



Syst.: le récepteur cyclique

1^{er} P sur un cycle: $\Delta U = 0 = Q_c + Q_f + W$

2nd P sur un cycle: $\Delta S = 0 = \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} + S_{cr}$
 ≥ 0

D'où $Q_c = -W - Q_f$ et $-\frac{W}{T_c} - \frac{Q_f}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} \leq 0$

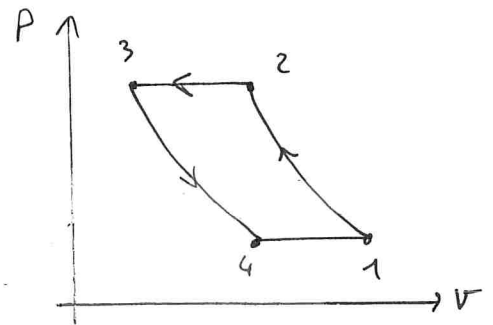
On choisit $W > 0$ (c'est un récepteur) et on souhaite $Q_f > 0$ (on prélève de la chaleur à la source froide)

Or $Q_f \leq \frac{W}{T_c} \frac{1}{\frac{1}{T_f} - \frac{1}{T_c}} = \frac{W \cdot T_f}{T_c - T_f}$
 ≥ 0

Il est donc possible d'avoir $Q_f \geq 0$ mais Q_f doit rester inférieure à $W \cdot \frac{T_f}{T_c - T_f}$.

2. $e_f \stackrel{\text{def}}{=} \frac{Q_f}{W}$ De ce qui précède on peut déduire

que $e_f \leq \frac{T_f}{T_c - T_f} = 8,6$



3. Cycle parcouru dans le sens anti-horaire $\Rightarrow W > 0$: cycle récepteur
 C'est cohérent!

4. Id. thermo: $dS = \frac{dU}{T} + \frac{p}{T} dV$ avec $dU = n \frac{R}{\gamma-1} dT$ pour 1 GP.

donc $dS = n \frac{R}{\gamma-1} \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V} \Rightarrow \Delta S = n \frac{R}{\gamma-1} \ln \left(\frac{T_2 V_2^{\gamma-1}}{T_1 V_1^{\gamma-1}} \right)$

en remplaçant V par $\frac{T \times c_v}{P}$ on obtient:

$$\Delta S = n \frac{R}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{T_2^\gamma P_2^{1-\gamma}}{T_1^\gamma P_1^{1-\gamma}} \right)$$

5. Le passage de T_1 à T_2 se fait par une compression adiabatique réversible. Comme l'air est un GP on peut appliquer les formules de Laplace:

$$P_2^{1-\gamma} T_2^\gamma = P_1^{1-\gamma} T_1^\gamma \Rightarrow$$

$$T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 346 \text{ K.} \quad (73^\circ\text{C})$$

De m de 3 à 4 donc industriel

$$T_4 = T_3 \left(\frac{P_3}{P_4} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 250 \text{ K} \quad (-23^\circ\text{C})$$

6. 1^{er} Principe pour une isobare pour l'air: $\Delta h = q + w_u$.
Lors de l'évolution au contact de la source chaude

$w_u = 0$ donc

$$q_c = \Delta h = c_p (T_3 - T_2) = -33,1 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

(en effet $c_p = \frac{c_{p,m}}{M} = \gamma \frac{R}{M(\gamma-1)} = 1,0 \text{ kJ.k}^{-1}.\text{kg}^{-1}$)

7. $\Delta h_{41} = c_p (T_1 - T_4) = 26,1 \text{ kJ.kg}^{-1}$

8. $e_F = q_F / w$ L'énergie libérée par la détente ($w_{turb} < 0$) est récupérée pour alimenter en partie le compresseur: il ne reste qu'à fournir $w_{comp} - |w_{turb}| = w_{comp} + w_{turb}$.

De plus, sur un cycle: $\Delta u = 0 = q_F + q_c + w_{comp} + w_{turb}$

donc $e_{F,air} = \frac{q_F}{-q_c - q_F} = 3,7$

$e_{F,air} < e_{max} = 8,6$ car le cycle est irréversible.

9. Appliquons le 2^{er} P sur un cycle: $\Delta S = 0 = \frac{q_c}{T_c} + \frac{q_F}{T_F} + \Delta S_{ir}$

D'où $\Delta S_{ir} = - \left(\frac{q_c}{T_c} + \frac{q_F}{T_F} \right) = 13 \text{ J.k}^{-1}.\text{kg}^{-1}$

10. $d_{air} = \frac{P_{ch,F}}{q_F} = 0,096 \text{ kg.s}^{-1}$

$P_{comp} = d_{air} \cdot w_{comp}$ avec $w_{comp} = \Delta h_{12} = c_p (T_2 - T_1) = 70,2 \text{ kJ.kg}^{-1}$

d'où $P_{comp} = 6,7 \text{ kW}$

11. $\Delta_{\text{vap}}^{\Delta} (T_1) = s_V - s_L$ en relevant les valeurs de s de part et d'autre du palier de ch_g^+ d'état:

$\Delta_{\text{vap}}^{\Delta} (T_1) = 1720 - 980 = 740 \text{ J.k}^{-1}.\text{kg}^{-1}$	$P_1 = 2,5 \text{ bar}$
$\Delta_{\text{vap}}^{\Delta} (T_3) = 1710 - 1190 = 520 \text{ J.k}^{-1}.\text{kg}^{-1}$	$P_3 = 10,0 \text{ bar}$

12. On sait que $\Delta_{\text{vap}}^{\Delta} = \frac{\Delta h_{\text{vap}}}{T_{\text{vap}}}$ donc $\Delta h_{\text{vap}}(T_i) = T_i \cdot \Delta_{\text{vap}}^{\Delta}(T_i)$

$\Delta h_{\text{vap}}(T_1) = 199 \text{ kJ.kg}^{-1}$	et	$\Delta h_{\text{vap}}(T_3) = 163 \text{ kJ.kg}^{-1}$
---	----	---

R: on a bien Δh_{vap} qui diminue quand T augmente (et tend vers 0 qd $T \rightarrow T_{\text{critique}} \approx 100^\circ\text{C}$)

13. Isobare du GP: $dS = \frac{dU}{T} + \frac{p}{T} dV = \frac{dH}{T} - \frac{V}{T} dp$
car $dH = dU + pdV + Vdp$

Pour une isobare $dp=0 \Rightarrow dS = \frac{dH}{T} = \frac{nR\gamma}{\gamma-1} \frac{dT}{T}$

d'au $S - S_0 = \frac{nR\gamma}{\gamma-1} \ln \frac{T}{T_0} \Rightarrow T = T_0 e^{(S-S_0) \cdot \frac{\gamma-1}{nR\gamma}}$

$\gamma > 1$ donc $T =$ fonction exponentielle croissante de S .

14. cf. figure (en marron: $T = T_0 e^{(S-S_0) \cdot \frac{\gamma-1}{nR\gamma}}$)

15. On lit: $T_2 \approx 45^\circ\text{C}$ car $\frac{n}{m} = \frac{1}{M}$.

16. 1^e P en écoulement pour le fluide: $\Delta h_{23} = q_c + w_u$
mais $w_u = 0$ ici donc

$q_c = \Delta h_{23} = -\Delta h_{\text{vap}}(T_3)$
$= -163 \text{ kJ.kg}^{-1}$

R: le terme négligé ici est $\Delta h = c_{p,\text{vap}}(T_2 - T_3)$ (refroidissement de la vapeur avant liquéfaction) qui est effectivement faible devant l'enthalpie de liquéfaction car $T_2 - T_3$ est faible.

17. Lors du passage dans le condenseur le fluide echange avec la source chaude à $T_c = 35^\circ C$

Donc $\Delta s_{23} = \frac{q_c}{T_c} + \Delta s_a^{cond} \Rightarrow$

$$\Delta s_a^{cond} = s_3 - s_2 - \frac{q_c}{T_c}$$

$$= -520 + 530 = 10 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$$

R: c'est irréversible mais faiblement car $T_{rupt} \approx T_{source}$.

18. Lors de la détente de J.Th: $\Delta h_{34} = 0$

Or h est une fonction d'état donc $\Delta h_{34} = \Delta h_{33'} + \Delta h_{3'4}$ en introduisant le point 3' sur la courbe d'ébullition à T_1 .

$$\Delta h_{34} = 0 = c_{liq}(T_1 - T_3) + x_{v4} \Delta h_{vap}(T_1)$$

donc

$$x_{v4} = \frac{c_{liq}(T_3 - T_1)}{\Delta h_{vap}(T_1)}$$

19. On sait que pour un PCII: $\Delta s_{33'} = c_{liq} \ln \frac{T_3}{T_1}$

or $s_3 = 1190 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$ et $s_{3'} = 980 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$

donc $c_{liq} = 1,39 \text{ kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$ ce qui donne $x_{v4} = 0,31$

20. Le placement du point 4 se fait à l'aide du théorème des moments.
($x_{v4} = \frac{[s_{3'4}]}{[s_{3'1}]}$)

21. L'évolution 3 → 4 est adiabatique donc $s_{éch} = 0$

et $s_{cr}^{dét} = \Delta s_{34} = s_4 - s_3 = 1210 - 1190 = 20 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$

(La précision de la lecture est faible!) > 0 irréversible

22. $q_F = \Delta h_{41} = (1 - x_{v4}) \Delta h_{vap}(T_1) = 135 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$

23. $s_{cr}^{évap} = \Delta s_{41} - s_{éch}_{41} = s_1 - s_4 - \frac{q_F}{T_F} = 1720 - 1210 - \frac{135 \cdot 10^3}{276}$

$s_{cr}^{évap} = 14 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1} > 0$ irréversible (faiblement car $T_{rupt} \approx T_{source}$)

24. Sur un cycle $\Delta h = 0 = q_c + q_f + w_u$

D'où $w_u = -q_c - q_f = 28 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$

25. $e_{\text{frén}} = \frac{q_f}{w_u} = 4,8$ On n'est pas loin de e_{Fmax} !

26. $d_{\text{frén}} = \frac{P_{\text{ch,F}}}{q_f} = 18,5 \text{ g} \cdot \text{s}^{-1}$

27. $P_{\text{comp}} = d_{\text{frén}} \cdot w_u = 520 \text{ W}$

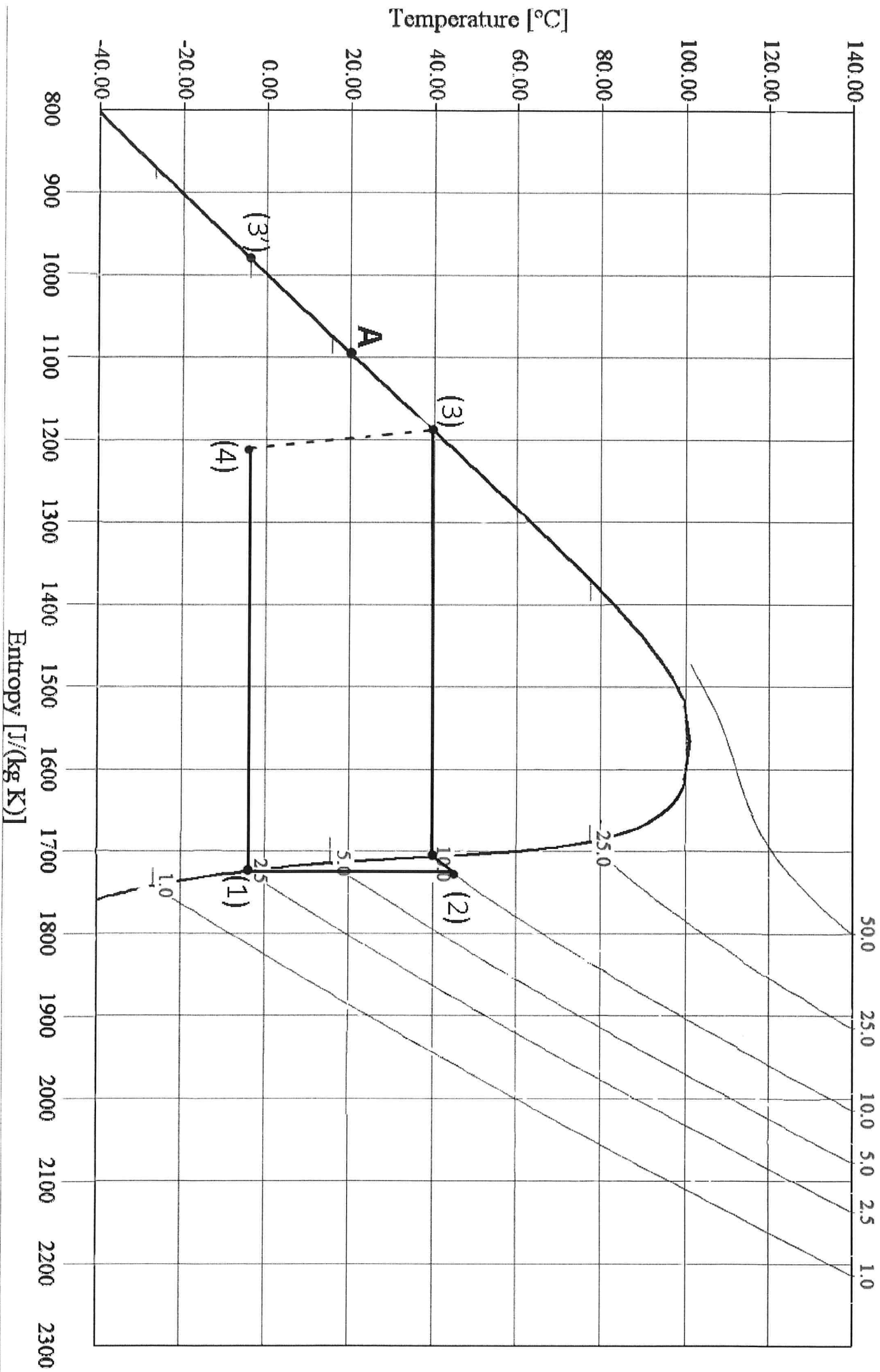
La climatisation avec changement d'état est
beaucoup plus efficace que celle sans chgt — .

Pour améliorer l'efficacité de la climatisation
à air il faut augmenter le taux de compression
mais T_{max} est alors élevée $> 600\text{K}$ et T_{min} est
très froide \Rightarrow il ne faut pas réinjecter l'air
directement dans la pièce !

Attention tout de même : dans cette climatisation
avec frén, il ne faut pas que T_{chaud}
atteigne 40°C sinon il n'y a plus de
liquéfaction du frén au contact de l'atmosphère (2 \rightarrow 3)

En pratique il faudrait régler le compresseur
pour que p_3 soit de l'ordre 20 bars pour avoir
 $T_3 \sim 60^\circ\text{C}$ ou 70°C qui assure un fonctionnement
quelque soit la température extérieure (enfin
au moins pour quelques années encore !)

Diagramme $T-s$ pour le fluide R134a



II Effet de Föhn

7

1. Dans R galiléen, pour un fluide pesant au repos:

$$\frac{dp}{dz} = \rho \vec{g} \cdot \vec{e}_z$$

(ou pour un fluide quelconque: $\text{grad} p + \sum \vec{f}_{\text{vol}} = \vec{0}$)

2. Pour un GP: $\rho = \frac{m}{V} = \frac{nM}{V} = \frac{PM}{RT}$ d'où $\frac{dp}{dz} = -\rho \cdot \frac{Mg}{RT}$

Finalement $p = p_0 e^{-z/H_c}$ avec $H_c = \frac{RT_0}{Mg} = 8,6 \text{ km}$.

3. Evolution rapide donc adiabatique car les échanges thermiques sont lents.

4. On peut appliquer les formules de Laplace à l'air:

$$p^{1-\gamma} \cdot T^\gamma = \text{cte} \quad \text{donc} \quad (1-\gamma) \frac{dp}{p} + \gamma \frac{dT}{T} = 0$$

en utilisant $\frac{dp}{dz} = -\rho \frac{Mg}{RT} \Rightarrow -(1-\gamma) \cdot p \frac{Mg}{RT} \frac{dz}{p_0} + \gamma \frac{dT}{T} = 0$

Finalement: $\frac{dT}{dz} = \frac{(1-\gamma)}{\gamma} \cdot \frac{Mg}{R} = a = -0,0097 \text{ K} \cdot \text{m}^{-1}$
 $= -9,7 \text{ K} \cdot \text{km}^{-1}$

5. $\frac{dp}{dz} = -\rho \cdot \frac{Mg}{R(T_0 + az)}$

On sépare les variables: $\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{R} \cdot \frac{dz}{T_0 + az}$

On intègre entre $z=0$ et z : $\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{Mg}{Ra} \ln \left(\frac{T_0 + az}{T_0} \right)$

D'où $p(z) = p_0 \left(1 + \frac{a}{T_0} z \right)^{-\frac{Mg}{Ra}}$

6. iso T_0 : $p(6000\text{m}) = 0,50 \text{ bar}$

gradient: $p(6000\text{m}) = 0,46 \text{ bar}$

$$\frac{\Delta p}{p} = 8\%$$

7. $T_B = T_0 + ah = 263 \text{ K} (-5^\circ\text{C})$
et $T_C = T_0 = 293 \text{ K} (20^\circ\text{C})$

Il n'y a pas d'effet Föhn en l'absence d'humidité.

8. Pour $H = 70\%$ avec $T = 20^\circ\text{C}$ on lit la masse d'eau : $m_{\text{eau}} = 10,5 \text{ g / kg d'air}$.

L'hypothèse d'un changement d'état isobare adiabatique

donne: $\Delta H_{\text{air}} + \Delta H_{\text{eau}} = 0$ avec $\Delta H_{\text{eau}} = m_{\text{eau}} \cdot (-\Delta h_{\text{vap}})$
 et $\Delta H_{\text{air}} = m_{\text{air}} \cdot c_p \Delta T_{\text{air}}$

On en déduit: $\Delta T_{\text{air}} = \frac{m_{\text{eau}}}{m_{\text{air}}} \times \frac{\Delta h_{\text{vap}}}{c_p} = 24 \text{ K}$

Le changement d'état de l'eau conduit à un échauffement de l'air de 24°C ! $T_B' = T_B + 24^\circ\text{C} = 19^\circ\text{C}$

Lors de la descente l'air sec gagne 10°C tous les 1000 m d'air $T_C' = T_B' - a h = 44^\circ\text{C}$

L'échauffement obtenu est un peu excessif!

9. Il est fort probable que 'une partie seulement' de l'eau se liquéfie.

A l'aide du diagramme psychrométrique on lit que le taux d'humidité H atteint 100% lorsque

$T = 14^\circ\text{C}$. Si l'air monte encore l'eau va se liquéfier mais H reste à 100% .

Si $T_B = 5^\circ\text{C}$, on lit que l'humidité absolue est alors $5,5 \text{ g / kg}$ pour $H = 100\%$. La quantité d'eau qui s'est liquéfiée est alors $m = 5 \text{ g}$

et $\Delta T_{\text{air}} = 11,5^\circ$. Cela donne bien $T_B'' = T_B + 11,5^\circ$

D'air $T_C'' = T_B'' + a h = 30^\circ\text{C} = 5^\circ\text{C}$

C'est encore très chaud mais plus raisonnable!

III Piano

1. OP selon x croissant: $z(x, t) = f(x - ct)$

2. OPH: $z(x, t) = z_m \cos\left(2\pi \cdot \frac{x - ct}{\lambda}\right)$

$$\boxed{\lambda = cT = \frac{c}{f}}$$

3. $z(x, t) = z_m \cos\left(2\pi \frac{x}{\lambda} + \varphi\right) \cos(2\pi f t + \varphi')$

La condition aux limites $z(x=0, t) = 0$ impose que:

$$\cos \varphi = 0 \rightarrow \text{prenons } \varphi = \frac{\pi}{2}$$

La 2^e condition aux limites $z(x=L, t) = 0$ impose:

$$\cos\left(2\pi \frac{L}{\lambda} + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{donc} \quad 2\pi \frac{L}{\lambda} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

finalement: $2\pi \frac{L}{\lambda} = n\pi$ d'où les longueurs d'onde

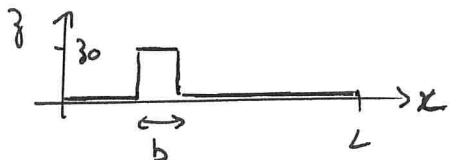
possibles: $\boxed{\lambda_n = \frac{2L}{n}}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

4. Or $f = \frac{c}{\lambda}$ donc $\boxed{f_n = n \cdot \frac{c}{2L}}$

(mode propre = mode sinusoïdal).

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda_1 &= 2L = 4,0 \text{ m} \\ f_1 &= \frac{c}{2L} = 340 \text{ Hz} \end{aligned}}$$

5. $z_0 \frac{b}{L} = \langle z \rangle$ cela correspond à la valeur moyenne de la déformation qui ressemble peut être à ça:



6. A partir de $z(x, t=0)$ on peut obtenir l'expression de $z(x, t)$ car on connaît la fréquence de chaque mode propre:

$$z(x, t) = z_0 \frac{b}{L} + z_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda_n}\right) \cos(2\pi f_n t) \right]$$

7. cf code

8. S'il s'agit de "lancer de piano", je peux tenter ma chance!

```

from math import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

## code attendu
x = np.linspace(0,L,1000)

z = z0*b/L + z0*A[0]*np.sin(pi*x/L)

for n in range(2,101):
    z = z + z0*A[n-1]*np.sin(n*pi*x/L)

plt.close()
plt.plot(x,z)
plt.show()

-----
## code correct
# en réalité la décomposition de Fourier donnée est valable pour une corde
centrée en  $x = 0$  (donc allant de  $-L/2$  à  $L/2$ )
# En conséquent il faut utiliser des cosinus à la place des sinus dans
l'expression de  $z(x,t=0)$ .
# Pour  $b = 2$  cm.

b, L, z0 = 0.02, 0.5, 1

# Voici la formule exacte des coefficient  $a_n$ 
A = [z0*b/L*sin(n*pi*b/2/L)/(n*pi*b/2/L) for n in range(1,1001)]

x = np.linspace(-L/2,L/2,1000)

z = z0*b/L + z0*A[0]*np.cos(pi*x/L)

for n in range(2,1001):
    z = z + z0*A[n-1]*np.cos(n*pi*x/L)

plt.close()
plt.plot(x+L/2,z) # on recentre artificiellement sur  $x = L/2$ 
plt.show()

```

