

Samedi 30 septembre 2023

## DEVOIR SURVEILLE N°1

### PHYSIQUE

**Question 0** : y a-t-il des lions à Fermat ? Au cas où la réponse serait positive (donc fausse), les lions préfèrent-ils manger les moutons ou les Bourriquets ?

#### I. Analyse dimensionnelle : épaisseur de peau

Lorsqu'un conducteur électrique est parcouru par un courant électrique variable la répartition du courant au sein du conducteur n'est pas uniforme.

Le courant est plus intense près de la surface du conducteur sur une épaisseur caractéristique  $\delta$  qui dépend de la fréquence  $f$  du courant et de la conductivité électrique  $\sigma$  du métal.

Cette épaisseur caractéristique  $\delta$  est appelée **épaisseur de peau** et il est possible de l'exprimer sous la forme d'un monôme des paramètres  $f$ ,  $\sigma$  et de la permittivité du vide noté  $\mu_0 = 1,26 \times 10^{-6} SI$  :

$$\delta = \lambda f^a \mu_0^b \sigma^c$$

où  $\lambda$  est un facteur multiplicatif sans dimension.

#### **Données :**

- $\mu_0$  intervient également dans l'expression de la force entre deux fils de longueur  $L$  parcourus par un courant d'intensité  $I$  et distant de  $d$  :

$$F = \mu_0 \frac{I^2 L}{2\pi d}$$

- La conductivité électrique  $\sigma$  d'un métal s'écrit :

$$\sigma = \frac{N_V e^2 \tau}{m}$$

où  $m$  est la masse de l'électron,  $N_V$  le nombre d'électrons par unité de volume,  $e$  la charge élémentaire et  $\tau$  la durée moyenne séparant deux collisions.

1. Déterminer la dimension de  $\mu_0$ .
2. Déterminer la dimension de  $\sigma$  [peut-être est-il utile de rappeler qu'une charge est homogène à une intensité multipliée par un temps].
3. Déterminer les coefficients  $a$ ,  $b$  et  $c$ .
4. Sachant que  $\lambda = 1/\sqrt{\pi}$ , faire l'A.N. pour le cuivre ( $\sigma = 6 \times 10^7 SI$ ) aux deux fréquences  $f = 50 Hz$  et  $f = 10 MHz$ .

## II. Oscillateur harmonique : flipper

On s'intéresse au mouvement d'une bille métallique dans un flipper.



### A. Equilibre de la bille

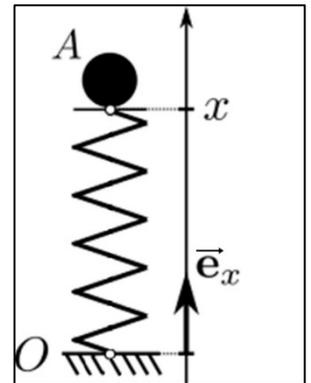
Le dispositif de lancement de la bille est schématisé sur la figure ci-contre :

Une tige de lancement non représentée permet au joueur de comprimer un ressort dont l'extrémité O est fixe.

L'autre extrémité appuie sur la bille **A**, assimilée à un point matériel repéré par son abscisse  $x$  et de masse  $m = 100 \text{ g}$ .

On note  $k = 20 \text{ SI}$  la constante de raideur du ressort et  $\ell_0 = 20 \text{ cm}$  sa longueur à vide.

On prendra la valeur  $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  pour l'accélération de la pesanteur.



- Déterminer la dimension de  $k$  ainsi que son unité dans le système international.
- Exprimer la position  $x_{\text{éq}}$  de la bille au repos. Faire l'analyse de la formule obtenue (influence des paramètres  $m$  et  $k$ ) puis l'A.N.
- Voici les relevés expérimentaux de  $x_{\text{éq}}$  par un élève de PCSI1 :

$x_{\text{éq}}$ en cm	15,0	15,0	14,9	15,0	15,1	14,9	15,0	14,8
-----------------------	------	------	------	------	------	------	------	------

En déduire le résultat de la mesure avec son incertitude-type.

### Tir de la bille : phase 1

A l'aide de la tige de lancement, le joueur comprime le ressort jusqu'à une valeur notée  $\ell_1 < x_{\text{éq}}$ .

Il libère alors la tige de lancement et la bille est alors mise en mouvement par le ressort sans vitesse initiale.

La phase 1 du lancement correspond à la phase pendant laquelle la bille reste en contact avec le ressort.

- Etablir l'équation différentielle satisfaite par  $x(t)$  au cours de la phase 1.
- Mettre cette équation sous forme canonique et introduire une pulsation propre  $\omega_0$ .
- Calculer la période associée à cette pulsation propre  $T_0$  et faire l'A.N.
- Déterminer, durant la phase 1, la solution de l'équation précédente compatible avec les conditions initiales décrites dans l'énoncé. Donner l'expression de l'amplitude  $x_m$  des oscillations.

8. Etablir l'expression de la vitesse de la bille au cours du temps  $v(t)$  et donner l'amplitude  $v_m$  des variations de la vitesse.
9. Tracer sur deux graphes séparés l'allure des courbes  $x(t)$  et  $v(t)$  durant la phase 1.
10. La phase 1 se termine lorsque le ressort atteint sa longueur à vide  $\ell_0$  (le contact entre la bille et le ressort est alors rompu), déterminer l'instant  $t_f$  correspondant.
11. Déterminer la vitesse  $v_f$  à l'instant  $t_f$ .
12. Faire l'A.N de  $t_f$  et  $v_f$  pour  $\ell_1 = 10 \text{ cm}$  puis pour  $\ell_1 = 1 \text{ cm}$ .
13. Déterminer l'expression de l'accélération  $a(t)$  de la bille au cours de la phase 1 ainsi que la position  $x_1$  pour laquelle l'accélération s'annule.

Si le ressort a été suffisamment comprimé au départ, la **deuxième phase** du mouvement débute au-delà de l'instant  $t_f$  : la bille se désolidarise de l'extrémité du ressort, s'élève puis chute dans la partie centrale du flipper. Cette phase du mouvement ne sera pas étudiée, elle ne peut pas être traitée dans le cadre du programme de révisions défini pour ce devoir.

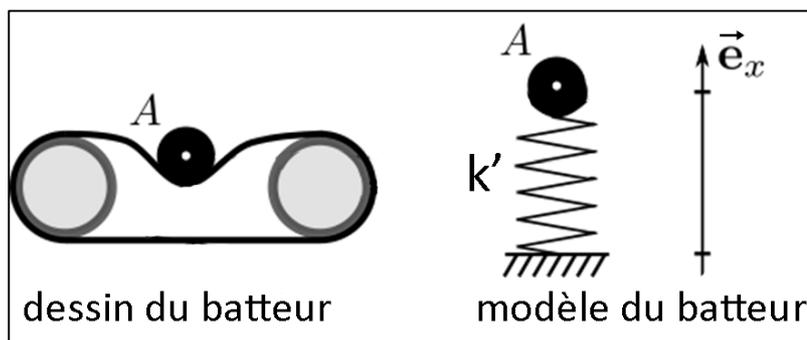
### Phase 3 : rebond sur un batteur



À l'issue de sa chute dans le flipper, la bille arrive avec une vitesse  $v_0$  sur un batteur qui est constitué d'une membrane qui se déforme lors du choc et renvoie la bille dans la direction opposée à celle d'arrivée [en tout cas pour une arrivée de la bille perpendiculairement au batteur immobile].

La membrane du batteur est modélisée par un ressort de constante de raideur  $k'$  et de longueur à vide  $\ell'_0$ .

Par ailleurs, durant toute la phase où la bille est en contact avec le batteur, on admettra que le poids de la bille est négligeable devant la force de rappel élastique.



On prend une nouvelle origine des temps ( $t' = 0$ ) à l'instant où la bille entre en contact avec la membrane avec une vitesse  $\vec{v}_0 = -v_0 \vec{e}_x$  avec  $v_0 > 0$ . La membrane était au repos pour  $t < 0$  donc on peut modéliser la longueur initiale du ressort égale à  $\ell'_0$ .

14. Etablir l'équation différentielle satisfaite par la longueur  $x$  du ressort pour la phase où la bille est en contact avec le ressort.
15. Résoudre cette équation en tenant compte des conditions initiales précédentes.
16. À quel instant  $t_1$  la vitesse de la bille change-t-elle d'orientation ?
17. Quelle est la durée  $\Delta t$  de contact entre la bille et la membrane sachant que le contact cesse dès que le ressort a repris sa longueur à vide  $\ell'_0$ . Faire l'A.N. pour  $k' = 160 \text{ SI}$  et  $\ell'_0 = 3 \text{ cm}$ .

### III. Optique géométrique : modélisation du halo solaire (d'après Agro-véto 2023)

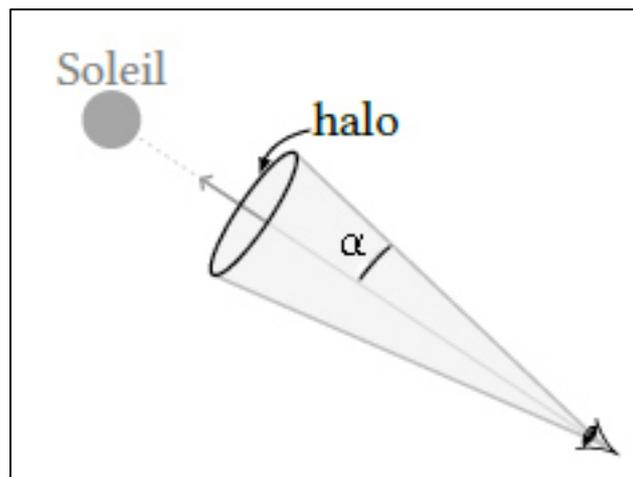
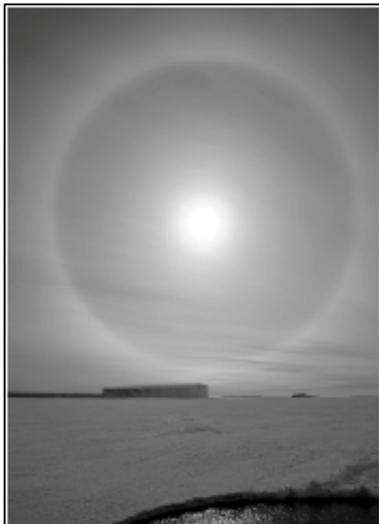
Dans l'ensemble du problème, on considère que l'indice optique de l'air est égal à 1 et que celui de la glace est  $n_g = 1,31$ .

#### A. La réfraction de la lumière

1. Rappeler les lois de la réflexion et de la réfraction de Snell-Descartes [un schéma clair est indispensable].
2. Lorsque la lumière parvient sur un dioptre séparant deux milieux d'indices  $n_1$  et  $n_2$ , à quelle(s) condition(s) subit-elle une réflexion totale ? Faire apparaître un angle limite  $i_{lim}$  dans une inégalité.
3. Dans le cas d'un dioptre séparant l'air et la glace, calculer la valeur de  $i_{lim}$  en radians et en degrés.

#### B. Le halo solaire

Le halo solaire, ou **anthélie**, est un phénomène optique atmosphérique qui ressemble à un arc-en-ciel circulaire (voir photo ci-dessous). Il apparaît sous la forme d'un cercle coloré dont le Soleil occupe le centre. L'objectif est la détermination du rayon angulaire du halo  $\alpha$  (qui représente l'angle au sommet du cône représenté sur la figure ci-après).

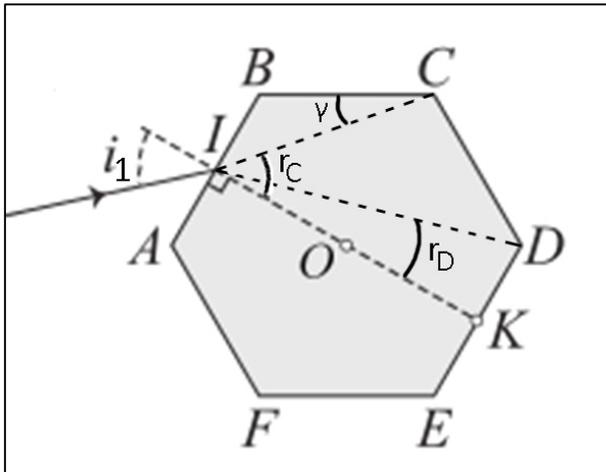


Le halo est dû à la réfraction de la lumière issue du Soleil par de petits cristaux de glace en forme de bâtonnets. Ces cristaux forment des nuages de haute altitude (environ 10 km) appelés cirrus. Les plus petits de ces cristaux (dont la taille peut être inférieure à  $20 \mu\text{m}$ ) ont un mouvement erratique provoqué par le choc des molécules qui constituent l'air ; ils ont donc toutes les orientations possibles dans l'espace.

Puisqu'on ne s'intéresse qu'à la déviation des rayons lumineux, on peut modéliser la réfraction de la lumière issue du Soleil par l'ensemble de ces cristaux par la réfraction de la lumière par un seul cristal en considérant un angle d'incidence variable.

La figure suivante donne la représentation de la section droite d'un cristal de glace. Cette section présente la géométrie d'un hexagone régulier (ABCDEF).

Un rayon lumineux incident, contenu dans le plan de cette section, atteint le milieu de la face (AB) avec un angle d'incidence variable  $i_1$ . On étudie la déviation de ce rayon lumineux par le cristal.



Un peu de géométrie donne :

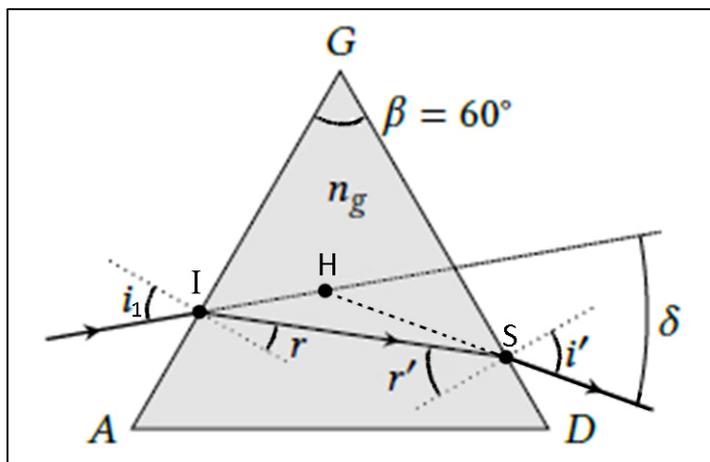
- $\widehat{ABC} = 120^\circ$
- $r_D = \widehat{KID} = \arctan\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right) = 16,1^\circ$
- $r_C = \widehat{KIC} = \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 49,1^\circ$
- $\gamma = \widehat{ICB} = r_C - 30^\circ = 19,1^\circ$

On note O le centre du cristal et on recherche les conditions sur  $i_1$  qui permettent au rayon incident d'émerger sur les faces latérales du cristal.

4. Déterminer la valeur de l'angle  $i_1$ , notée  $i_D$ , pour que le rayon réfracté arrive au point D.
5. Si  $i_1 \leq i_D$ , sur quelle face le rayon lumineux réfracté parvient-il ? Déterminer l'angle formé par le rayon lumineux avec la normale au second dioptre lorsqu'il émergera du cristal. Que peut-on dire de la déviation du rayon lumineux par le cristal dans ce cas ?
6. Déterminer la valeur de l'angle  $i_1$ , notée  $i_C$ , pour que le rayon réfracté arrive au point C.
7. Le rayon arrivant en C émerge-t-il par la face (BC) ? Dans l'affirmative, quel est son angle de sortie par rapport à la normale au dioptre (BC) ?
8. Si  $90^\circ \geq i_1 \geq i_C$ , sur quelle face le rayon lumineux réfracté parvient-il ? Déterminer l'angle minimal d'incidence sur la face (BC) et conclure sur le devenir de ce rayon.

On s'intéresse maintenant au rayon réfracté arrivant sur la face (CD) :  $i_D < i_1 < i_C$ .

Les faces (AB) et (CD) sont analogues aux faces d'un prisme de sommet G, d'angle au sommet  $\beta = 60^\circ$  et d'indice optique égal à celui de la glace, à savoir  $n_g$  (voir figure ci-dessous).



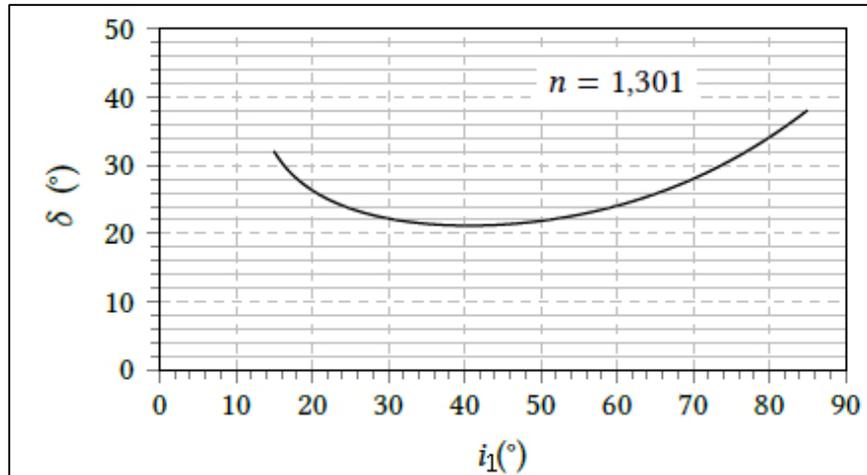
Les différents angles sont définis sur la figure précédente et sont compris entre 0 et  $90^\circ$ .

On note  $\delta$  l'angle qui mesure la déviation du rayon incident après sa traversée du prisme.

9. Donner les relations qui lient  $i_1, r$  et  $n_g$  d'une part ;  $i', r'$  et  $n_g$  d'autre part.

10. Établir la relation entre  $\beta, r$  et  $r'$  et montrer que  $\delta = i - r - r' + i'$ .

La figure suivante montre les variations de la déviation  $\delta$  en fonction de l'angle d'incidence  $i_1$ .



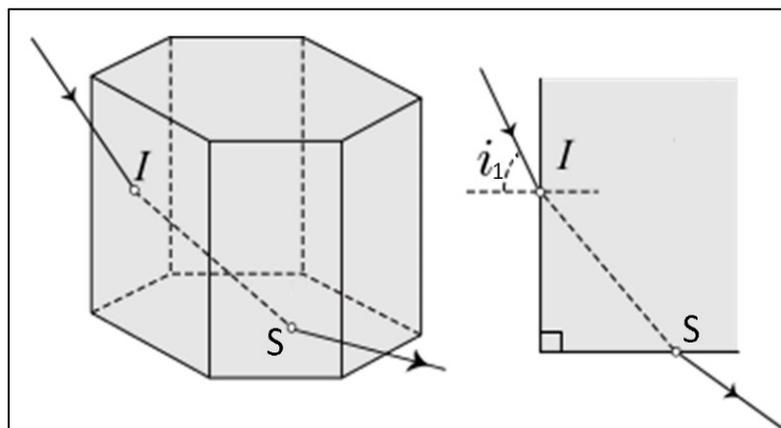
On constate l'existence d'une valeur minimale  $\delta_m$  dont on admet qu'elle est obtenue lorsque  $i_1 = i'$ .

11. En déduire l'expression de la déviation minimale  $\delta_m$  en fonction de  $\beta$  et  $n_g$ . Faire l'A.N. Est-ce cohérent avec ce qui est observé sur le tracé présenté ci-dessus ?

12. Expliquer pourquoi l'observateur observe une accumulation de lumière (le halo solaire) dans la direction qui correspond à une ouverture angulaire de  $22^\circ$  autour de l'axe dirigé de son œil vers le Soleil.

13. L'indice optique de la glace est une fonction décroissante de la longueur d'onde. On observe que le halo solaire est irisé (l'irisation est la production des couleurs de l'arc-en-ciel par décomposition de la lumière du Soleil) : de l'intérieur vers l'extérieur du halo, les couleurs observées varient du rouge au bleu. Préciser si les résultats établis précédemment sont en accord avec cette observation.

On considère maintenant, un rayon incident contenu dans un plan orthogonal aux faces hexagonales, qui atteint le cristal avec un angle d'incidence  $i_1$ . On note S le point d'émergence du rayon dans l'air.



14. Que vaut l'angle  $\beta'$  du prisme équivalent au cristal lorsque le rayon émerge en S ?
15. Que vaut alors l'angle  $\delta'_{min}$  de déviation minimale ? Commenter l'existence d'un second halo.



16. La PCSI1 de Fermat ne devrait-elle pas aller au ski étudier ce magnifique phénomène de plus près ?

#### **IV. Photographie de la coupe du monde de rugby**

Un spectateur de la coupe du monde de rugby souhaite faire une photographie d'un joueur sur le terrain. Il dispose pour cela d'un appareil photographique très simple composé d'une seule lentille et d'un appareil photo reflex équipé d'un téléobjectif composé de plusieurs lentilles.

Nous allons étudier ces deux appareils.

L'ensemble du problème est traité dans les conditions de Gauss.

1. Rappeler en quoi consistent les conditions de Gauss pour un système optique centré. Quels sont les intérêts de ces conditions ?

#### **Objectif d'appareil photographique modélisé par une lentille convergente unique**

L'appareil photographique simple est modélisé par une lentille mince convergente unique  $L_1$  de centre optique  $O_1$  et de focale  $f_1' = 60 \text{ mm}$  et d'un capteur CCD noté  $C$ .

Initialement l'appareil photographique est réglé à l'infini : l'image d'un objet à l'infini se forme sur le capteur.

2. Déterminer la distance  $d_0$  entre la lentille et le capteur  $C$ .

Le photographe souhaite capturer l'image d'un joueur de rugby de hauteur  $h_1 = 1,8 \text{ m}$  placé à une distance  $D = 20 \text{ m}$  de l'objectif.

3. Afin que l'image du joueur soit sur le capteur, il est nécessaire de modifier la distance entre la lentille et le capteur d'une valeur  $x_1$ . Prévoir le signe de  $x_1$  [ $x_1 > 0$  s'il faut éloigner le capteur de la lentille]. Déterminer l'expression de  $x_1$  et faire l'A.N.

4. Exprimer puis calculer la taille  $h_1'$  de l'image sur le capteur.

5. Si l'on souhaite photographier davantage de détails du sujet lointain, il faut changer la lentille de l'objectif. Faut-il choisir une distance focale  $f_2'$  plus élevée ou moins élevée que  $f_1'$  sachant que la distance  $D$  ne varie pas. [On pourra remarquer que  $D \gg f_1'$  pour simplifier l'étude].

Pour la suite on prendra un rapport 4 entre  $f_2'$  et  $f_1'$  [on a donc  $f_2' = 240 \text{ mm}$  ou  $f_2' = 15 \text{ mm}$  selon la réponse à la question précédente].

6. Calculer la hauteur  $h_2'$  de l'image du joueur sur le capteur ainsi que l'encombrement  $O_2C$  de l'appareil (distance entre la lentille  $L_2$  et le capteur  $C$ ).

#### **Téléobjectif constitué de l'association de deux lentilles**

Afin de limiter l'encombrement du téléobjectif, on peut réaliser un montage associant deux lentilles distantes d'une distance  $e$  : une lentille convergente  $L_1$  de centre  $O_1$  et de focale  $f_1'$  suivie d'une lentille divergente  $L_3$  de centre  $O_3$  et de focale  $f_3'$ .

On prendra pour les applications numériques :  $f_1' = 60 \text{ mm}$ ,  $f_3' = -20 \text{ mm}$  et  $e = 45 \text{ mm}$ .

On appelle  $F'$  le foyer image de l'association  $\{L_1 + L_3\}$ .

7. Après construction sur la figure en annexe, mesurer la distance algébrique  $\overline{O_3F'}$ .

8. L'image du joueur par la lentille  $L_1$  se forme pratiquement en  $F_1'$  [cela revient à considérer que l'objet est à l'infini]. Déterminer la taille de cette image intermédiaire  $h_i$  (expression puis A.N.).

9. A l'aide d'une formule du grandissement judicieusement choisie, déterminer la taille de l'image finale  $h'_3$  sur le capteur.
10. Quel est le nouvel encombrement  $O_1C$  de l'appareil photographique toujours défini par la distance entre la première lentille et le capteur.
11. Question bonus : sur quel score la France va-t-elle gagner la coupe du monde de rugby ?
12. Question super bonus : avez-vous entendu parler de la coupe du monde féminine de rugby ?



## RAPPELS SUR LES INCERTITUDES

### Écriture d'un résultat avec incertitude :

$$X = x \pm u(X) \text{ (la grandeur après le symbole } \pm \text{ est une incertitude\_type)}$$

ou

$$X = x ; u(X)$$

Attention à la cohérence des **chiffres significatifs** et à ne pas oublier **l'unité**.

### Incertitude-type de type A (répétition N fois de la mesure) :

Le menu STAT de la calculatrice donne la moyenne  $\langle x \rangle$  et l'écart-type  $S_x$  des N mesures.

Un point est aberrant s'il n'est pas dans l'intervalle  $[\langle x \rangle - 2S_x ; \langle x \rangle + 2S_x]$ .

L'incertitude-type de la mesure est donnée par :  $u_A = S_x / \sqrt{N}$ .

### Incertitude-type de type B (mesure unique) :

On détermine le **demi-intervalle** acceptable pour la mesure, noté  $a$  :

- pour une lecture sur une **échelle graduée** (règle, thermomètre gradué, palmer...) :

$$a = 1/2 \text{ graduation}$$

- pour un **appareil de mesure** à affichage digital (voltmètre, thermomètre électronique, ...) :

$a$  est appelé **précision** et est donné par la **notice**

- pour un **composant** (résistances, condensateurs, bobines, ...) :

$a$  est appelé **tolérance** et est donné par le **fabricant**

- pour une évaluation directe par l'utilisateur entre  $x_1$  et  $x_2$  :

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ et le demi - intervalle } a = \frac{x_2 - x_1}{2}$$

Si la mesure est à **lecture double** :  $a$  est multiplié par  $\sqrt{2}$

L'incertitude-type de la mesure est donnée par :  $u_B = a / \sqrt{3}$

### Comparaison d'une mesure : $x_1 ; u(x_1)$

avec une <b>valeur de référence</b> $x_{ref}$	avec une <b>autre mesure</b> : $x_2 ; u(x_2)$
On détermine l' <b>écart normalisé</b> ou <b>z-score</b> :	
$z = \frac{ x_1 - x_{ref} }{u(x_1)}$	$z = \frac{ x_1 - x_2 }{\sqrt{u(x_1)^2 + u(x_2)^2}}$
<p><b>Si <math>z &lt; 2</math></b>, on considère qu'il y a <b>compatibilité</b></p> <p><b>Si <math>z \geq 2</math></b>, on considère qu'il y a <b>incompatibilité</b> et il faut <b>chercher la cause</b>.</p>	

Annexe pour la question IV.7 :

