

DS n° 1

I Analyse dimensionnelle :

1. La formule $F = \gamma_0 \frac{I^2 L}{2\pi d}$ est homogène donc :

$$[\gamma_0] = \left[\frac{F \times d}{I^2 \times L} \right] = \boxed{M \cdot L \cdot T^{-2} \cdot I^{-2} = [\gamma_0]}$$

2. La formule $\nabla = \frac{Nv \cdot e^2 \cdot z}{m}$ est homogène donc :

$$[\nabla] = \frac{L^{-3} \cdot [I \times T]^2 \cdot T}{M} = \boxed{M^{-1} L^{-3} T^3 I^2 = [\nabla]}$$

3. $[J] = L$ donc $L = T^{-a} \cdot M^b \cdot L^c \cdot T^{-2b} \cdot I^{-2b} \cdot M^{-c} \cdot L^{-3c} \cdot T^3 \cdot I^{2c}$
 $[f] = T^{-1}$

soit le système :

$$\begin{cases} 1 = b - 3c \\ 0 = -a - 2b + 3c \\ 0 = b - c \\ 0 = -2b + 2c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = c \\ 1 = -2b \\ 0 = -a + b \end{cases}$$

Finalement :

$$\boxed{b = c = a = -\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{J = \frac{1}{\sqrt{\nabla \gamma_0 f}}}$$

4. AN: pour $f = 50 \text{ Hz}$: $J = 9,2 \text{ mm}$: phénomène non gênant
 pour $f = 10 \text{ MHz}$: $J = 21 \text{ } \mu\text{m}$: phénomène très gênant
 car seule une toute petite partie du fil conducteur est parcourue par le courant électrique : il y a échauffement et la résistance électrique du conducteur augmente. On dépose alors une fine couche d'or ($\nabla_{\text{or}} > \nabla_{\text{cuivre}}$) sur les conducteurs utilisés à haute fréquence.

III Osc. harmonique: flipper

1. On sait que $\|\vec{F}\| = k \Delta l$ donc $[k] = \frac{\text{Force}}{L} = \frac{M \cdot L \cdot T^{-2}}{L}$

$$\boxed{[k] = M \cdot T^{-2} \text{ donc } k \text{ est en } \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \text{ (ou } N \cdot \text{m}^{-1})}$$

dans le Système International.

2. Système: la bille Réf: terrestre considérée galiléenne

Forces: $m\vec{g}$ et $\vec{F} = -k(x-l_0)\vec{e}_x$ d'après la loi de Hooke.

La 2^e loi de Newton à l'équilibre s'écrit:

$$\vec{0} = m\vec{g} + \vec{F}. \text{ Après projection selon } \vec{e}_x, \text{ on obtient:}$$

$$0 = -mg - k(x_{\text{eq}} - l_0) \Rightarrow \boxed{x_{\text{eq}} = l_0 - \frac{mg}{k}}$$

On constate que $x_{\text{eq}} < l_0$

- si $m \nearrow$ alors $x_{\text{eq}} \searrow$

- si $k \nearrow$ alors $x_{\text{eq}} \nearrow$ tend vers l_0

} cohérent!

A.N:

$$\boxed{x_{\text{eq}} = 15 \text{ cm.}}$$

3. Le menu STAT de la machine donne: $\langle x_{\text{eq}} \rangle = 14,9625 \text{ cm}$

et $S_x = 0,092 \text{ cm}$ donc $\mu(x_{\text{eq}}) = \frac{S_x}{\sqrt{8}} = 0,032 \text{ cm.}$

D'où

$$\boxed{x_{\text{eq}} = 14,96 \text{ cm}; \mu(x_{\text{eq}}) = 0,03 \text{ cm}}$$

4. \hat{m} syst, \hat{m} ref, \hat{m} forces: la 2^e loi de Newton donne:

$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}$. La projection selon \vec{e}_x s'écrit:

$$m\ddot{x} = -mg - k(x-l_0) \quad : \quad \boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}\left(\frac{l_0}{k} - \frac{mg}{k}\right)}$$

5. La forme canonique est

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{\text{eq}}}$$

donc par identification on obtient: $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ et

$$\boxed{x_{\text{eq}} = l_0 - \frac{mg}{k}} \text{ qui est cohérente avec l'expression}$$

obtenue à la question 2.

$$6. \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 0,444 \text{ s.}$$

7. Les C.I. de l'énoncé sont $x(0) = l_1$ et $\dot{x}(0) = 0$.
La solution est de la forme : $x(t) = x_{\text{eq}} + A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$

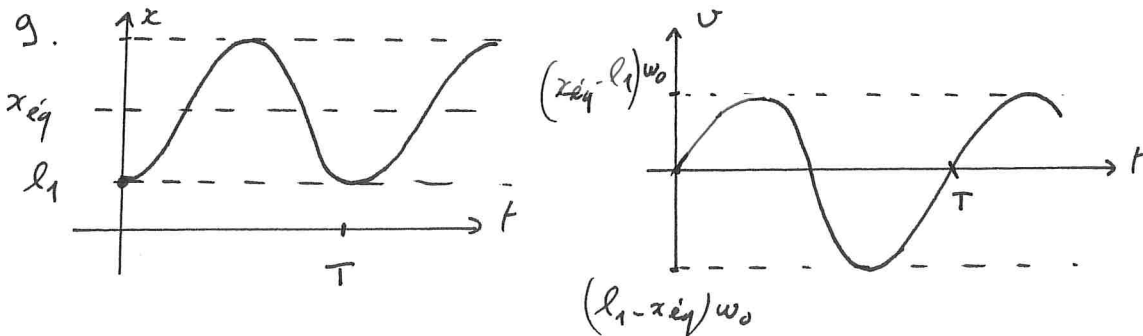
$$\text{donc } \dot{x}(t) = -A \omega_0 \sin \omega_0 t + B \omega_0 \cos \omega_0 t$$

$$\text{Donc } \begin{cases} l_1 = x_{\text{eq}} + A \\ 0 = B \omega_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 0 \\ A = l_1 - x_{\text{eq}} < 0. \end{cases}$$

amplitude
 $x_m = x_{\text{eq}} - l_1$
 $\Delta l_1 < x_{\text{eq}}$

$$\text{La solution est alors } x(t) = x_{\text{eq}} + (l_1 - x_{\text{eq}}) \cos \omega_0 t$$

$$8. \quad v(t) = \dot{x}(t) = -(l_1 - x_{\text{eq}}) \omega_0 \sin(\omega_0 t) \quad \text{amplitude de } v = \omega_0 (x_{\text{eq}} - l_1)$$



$$10. \quad x(t_f) = l_0 \quad \text{donne l'équation } l_0 - \frac{mg}{k} + (l_1 - l_0 + \frac{mg}{k}) \cos(\omega_0 t_f) = l_0$$

$$\text{soit } \frac{mg}{k(l_1 - l_0 + \frac{mg}{k})} = \cos(\omega_0 t_f) \Rightarrow t_f = \frac{1}{\omega_0} \arccos\left(\frac{mg}{k(l_1 - l_0) + mg}\right)$$

$$11. \quad v(t_f) = v_f = (x_{\text{eq}} - l_1) \omega_0 \sin\left(\arccos\left(\frac{mg}{k(l_1 - l_0) + mg}\right)\right)$$

$$v_f = \left(l_0 - l_1 - \frac{mg}{k}\right) \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{mg}{mg + k(l_1 - l_0)}\right)^2}$$

$$12. \quad \text{AN pour } l_1 = 10 \text{ cm} : t_f = 0,222 \text{ s } (= \frac{T_0}{2}) ; v_f = 0$$

Dans le cas où $l_1 = 10 \text{ cm}$, le ressort reste tout le temps au contact de la bille car les osc. sont entre l_1 et $x_{\text{eq}} + l_1 = 20 \text{ cm} = l_0$.

A.N: pour $l_1 = 1 \text{ cm}$ (donc l'amplitude des osc est 14 cm)

$$t_f = 0,137 \text{ s} \quad \text{et} \quad v_f = 1,85 \text{ m.s}^{-1}$$

Cette fois le lancement est efficace!

13. l'accélération de la bille est :

$$\ddot{x} = \dot{v} = (x_{\text{eq}} - l_1) \omega_0^2 \cos(\omega_0 t)$$

R: on peut également utiliser $\ddot{x} = \omega_0^2 (x_{\text{eq}} - x(t))$.

$\ddot{x} = 0$ lorsque $\cos(\omega_0 t) = 0$ donc lorsque $x = x_{\text{eq}}$.

La vitesse est maximale lors du passage par la position d'équilibre.

14. Syst: la bille

Ref: terrestre considérée galiléenne

Force: $m\vec{g}$ négligée

$$\vec{F} = -k'(x - l_0) \vec{e}_x$$

La 2^e loi de Newton projetée selon \vec{e}_x donne:

$$m \ddot{x} = -k'(x - l_0) \quad \ddot{x} + \frac{k'}{m} x = \frac{k'}{m} l_0$$

15. C.I: $\begin{cases} x(0) = l_0 \\ \dot{x}(0) = -v_0 \quad (\dot{x}(0) = \vec{v}_0 \cdot \vec{e}_x < 0) \end{cases}$

D'où $x = l_0 + A \cos \omega_0' t + B \sin \omega_0' t$ avec $\omega_0' = \sqrt{\frac{k'}{m}}$

Donc $\begin{cases} l_0 = l_0 + A \\ -v_0 = \omega_0' B \end{cases}$. Finalement $x(t) = l_0 - \frac{v_0}{\omega_0'} \sin(\omega_0' t)$

16. $\dot{x}(t) = -v_0 \cos(\omega_0' t)$

Or \vec{v} change de sens quand \dot{x} change de signe

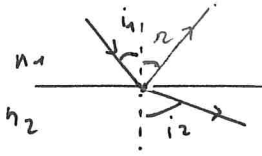
donc lorsque $\cos(\omega_0' t)$ s'annule : $t_1 = \frac{\pi}{2\omega_0'}$

17. $x(t_2) = l_0$ correspond à $\omega_0' t_2 = \pi$ donc à $t_2 = \frac{\pi}{\omega_0'} = 2t_1$

La durée de contact est donc $\Delta t = t_2 = \pi \sqrt{\frac{m}{k'}} = 0,078 \text{ s}$.
C'est très court! (et indépendant de l_0').

III Halo solaire

1. Loi de la réflexion :
- le rayon réfléchi existe toujours
 - il est dans le plan d'incidence
 - il est le symétrique du rayon incident par rapport à la normale



Loi de la réfraction : - quand il existe, le rayon réfracté :

- est dans le plan d'incidence

- vérifie : $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$

2. Si $n_2 < n_1$, le rayon réfracté n'existe que si $\sin i_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin i_1$ a une solution donc si $\frac{n_1}{n_2} \sin i_1 \leq 1$.

Il faut donc $i_1 \leq \boxed{\arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = i_{\text{lim}}}$.

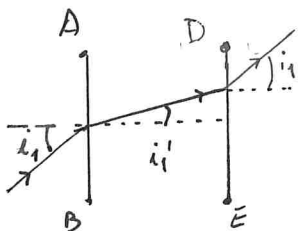
Si $i_1 > i_{\text{lim}}$, il se produit une réflexion totale.

3. pour $n_1 = n_g = 1,31$ et $n_2 = n_{\text{air}} = 1,00$ on obtient :

$$\boxed{i_{\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{1}{1,31}\right) = 0,868 \text{ rad} = 49,8^\circ}$$

R: il faut que le milieu 1 soit la glace pour avoir $n_1 > n_2$, condition nécessaire à une réflexion totale.

4. Pour que le rayon réfracté dans le cristal frappe directement le point D, il faut que l'angle de réfraction soit égal à r_D puisque $[IK]$ est la normale au dioptre (AB).



D'où $i_1' = r_D$ et $n_{\text{air}} \sin i_D = n_g \sin i_1'$ donnent :

$$\boxed{i_D = \arcsin(n_g \cdot \sin(r_D)) = 21,3^\circ \quad (0,372 \text{ rad})}$$

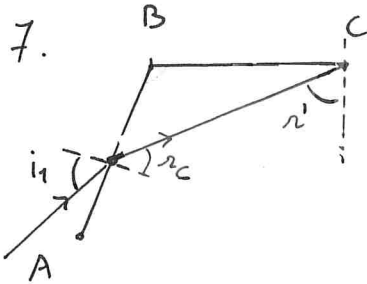
5. les faces (AB) et (DE) sont parallèles donc l'angle d'incidence sur (DE) est i_1' et son angle de sortie est i_1 .

(car $n_{\text{air}} \sin(i_1) = n_g \sin(i_1') = n_{\text{air}} \sin(i_{\text{sortie}}) : i_{\text{sortie}} = i_1$).

Si l'angle d'incidence est faible ($i_1 < i_c$) alors le rayon n'est pas dévié par le cristal. 6.

6. De même pour avoir $i_1' = r_c$ il faut:

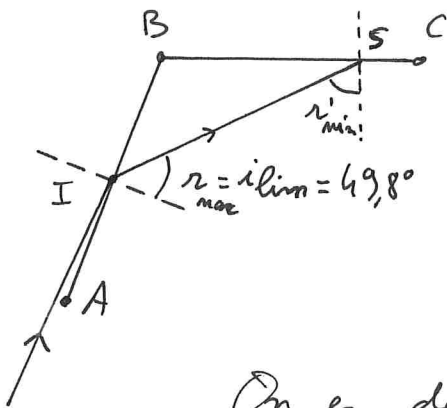
$$i_c = \arcsin(n_{gl} \sin(r_c)) = 82,0^\circ \quad (1,430 \text{ rad})$$



Lorsqu'il arrive au point C, le rayon fait un angle r' par rapport à la normale $\vec{a}(BC)$. Or $r' = 90^\circ - r = 70,9^\circ$.

L'angle d'incidence est supérieur à l'angle limite $(49,8^\circ)$ donc le rayon subit une réflexion totale et ne sort pas du cristal.

8. Si on augmente i_1 jusqu'à la valeur $i_1 = 90^\circ$



(incidence rasante), l'angle r est maximal et vaut:

$$n_{air} \sin 90^\circ = n_{gl} \sin r_{max}$$

$$\text{donc } r_{max} = \arcsin\left(\frac{1}{n_{gl}}\right) = i_{lim} = 49,8^\circ.$$

On en déduit r' qui est alors minimal:

$$\text{ds le triangle } IBS: 90^\circ - r_{max} + 120^\circ + 90^\circ - r'_{min} = 180^\circ$$

$$\text{D'où } r'_{min} = 120^\circ - r_{max} = 120^\circ - 49,8^\circ = 70,2^\circ.$$

r'_{min} reste supérieur à i_{lim} donc il y a encore réflexion totale: le rayon ne peut pas sortir par la face (BC).

9. La loi de la réfraction à l'entrée et à la sortie

donne :

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin i_1 = n_g \cdot \sin r \quad (1) \\ n_g \cdot \sin r' = \sin i' \quad (2) \end{array}} \quad (\text{car } n_{\text{air}} = 1)$$

10. Dans le triangle IGS: $90^\circ - r + \beta + 90^\circ - r' = 180^\circ$

d'où $\boxed{\beta = r + r'} \quad (3)$

Dans le triangle IHS: $i_1 - r + 180^\circ - \delta + i' - r' = 180^\circ$

d'où $\boxed{\delta = i_1 + i' - r - r'} \quad (4)$

11. Déviation minimale pour $i_1 = i'$ donc

$$n_g \sin r = \sin i_1 = \sin i' = n_g \sin r' \Rightarrow r = r'$$

et finalement (3) donne $\boxed{r = \beta/2}$

et (1) donne : $\boxed{\sin i_1 = n_g \sin(\beta/2)}$

Comme $r = r'$ et $i_1 = i'$, on a $\delta_{\min} = 2r + 2i_1$

Donc $\boxed{\begin{array}{l} \delta_{\min} = -\beta + 2 \arcsin(n_g \sin(\beta/2)) \\ = 21,8^\circ \end{array}}$

C'est cohérent
avec la figure
($\delta_{\min} \approx 21^\circ$)

12. En réalité ts les rayons du soleil arrivent parallèles entre eux (à peu près) et les angles d'incidence varient car les cristaux ont des orientations aléatoires (cf. énoncé). Or pour ttes les orientations comprises entre 30° et 60° , la direction de sortie des rayons est très proche de $\delta_{\min} = 22^\circ$. Il y a accumulation d'énergie lumineuse ds cette direction \Rightarrow halo lumineux.

13. n_g décroît avec λ donc $n_g(\text{rouge}) < n_g(\text{bleu})$.

On en déduit que $\mathcal{J}_{\min}(\text{rouge}) < \mathcal{J}_{\min}(\text{bleu})$

[arc sin(x) est croissante pour $x \in [0, 1]$].

Donc l'intérieur du halo est rouge et l'extérieur bleu.

14. Cette fois le cristal, avec les 2 faces qui interviennent sur le trajet du rayon, forme un prisme d'angle au sommet $\boxed{\beta' = 90^\circ}$ car les faces d'entrée et de sortie sont perpendiculaires

15. le même calcul donne cette fois $\boxed{\mathcal{J}'_{\min} = 45,7^\circ}$

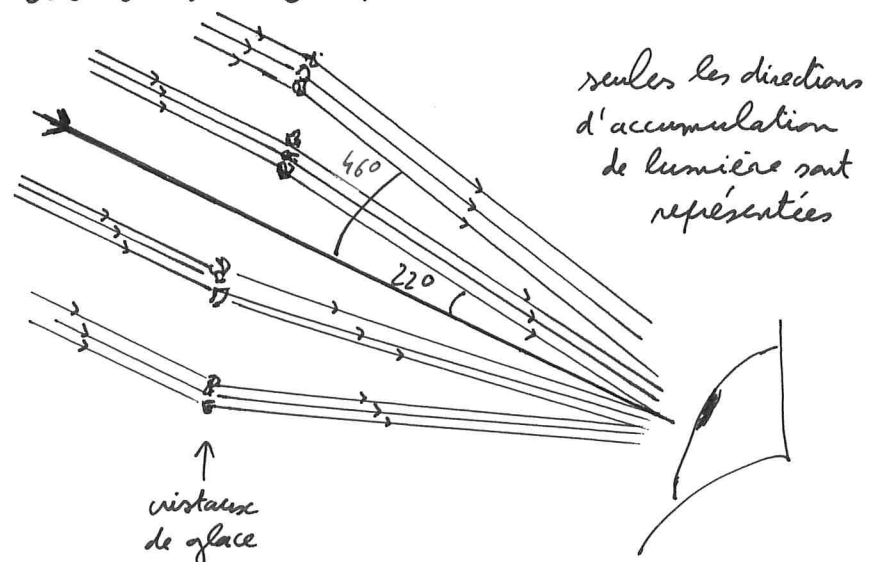
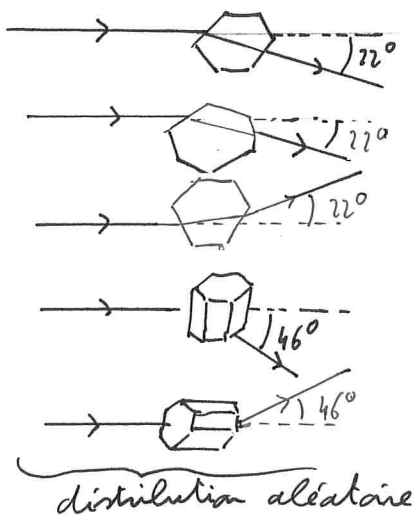
(0,798 rad)

Par la même raison (la dispersion des orientations des cristaux conduit à ttes les valeurs de i_i pour les rayons du soleil), il y a accumulation

de lumière dans la direction de sortie $= 45,7^\circ$

Il y a donc un 2^e halo plus large. Sa coloration est identique (rouge à l'intérieur et bleu à l'extérieur).

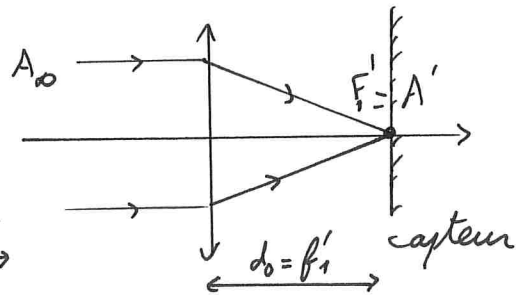
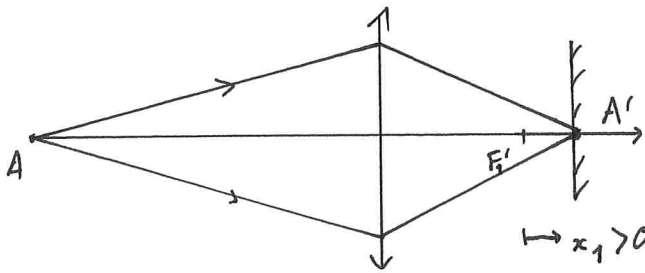
• Un ensemble de cristaux accumule la lumière ds les directions $\pm 22^\circ$ et $\pm 46^\circ$. D'où la vue d'ensemble:



IV Photographie

1. Les conditions de Gauss consistent à ne conserver que les rayons paraxiaux (ni trop écartés ni trop inclinés par rapport à l'axe optique). On élimine donc les rayons marginaux responsables des aberrations géométriques et le système optique devient approximativement stigmatique et aplanétique (mais on perd de la luminosité).
2. Si l'objet est à l' ∞ alors l'image est dans le plan focal image (par définition du foyer image) :

$$d_o = f'_1 = 60 \text{ mm}$$



3.

L'objet est plus proche de la lentille donc l'image s'éloigne de F'_1 : $x_1 > 0$.

$x_1 = \overline{F'_1 A'}$: la formule de Newton semble parfaitement indiquée !

$$\overline{F'_1 A'} \cdot \overline{F_1 A} = -f_1'^2 \quad \text{donc} \quad x_1 = \overline{F'_1 A'} = \frac{-f_1'^2}{\overline{F_1 A}}$$

avec $\overline{F_1 A} = \overline{F_1 O} + \overline{OA} = f'_1 - D$.

$$x_1 = \frac{-f_1'^2}{f'_1 - D} = 0,18 \text{ mm}$$

Le réglage pour la mise au point est très faible ! L'objet est en effet très loin de la lentille donc son image est très proche de F'_1 .

R: avec Descartes: $\frac{1}{d_1} - \frac{1}{-D} = \frac{1}{f'_1} \Rightarrow d_1 = \frac{f'_1 \cdot D}{(D - f'_1)} = 60,18 \text{ mm}$

et $x_1 = d_1 - d_o = 0,18 \text{ mm}$. \triangleleft objet réel ($\overline{OA} = -D$.)

4. $\gamma_t = \frac{h_1'}{h_1} = \frac{\overline{F_1'A'}}{f_1} = \frac{x_1}{-f_1'} \Rightarrow \boxed{h_1' = -h_1 \times \frac{x_1}{f_1'} = -5,4 \text{ mm.}}$
 (image renversée)

R: avec Descartes: $\gamma_t = \frac{h_1'}{h_1} = \frac{d_1}{-D} \Rightarrow h_1' = -h_1 \cdot \frac{d_1}{D} = 5,4 \text{ mm.}$

5. Pour une image + grande (en valeur absolue) il faut augmenter h_1' . Mais h_1' s'exprime avec f_1' et x_1 (ou d_1)

Or x_1 (ou d_1) dépend de f_1' !
 $h_1' = +h_1 \times \frac{f_1'}{f_1' - D} \approx -h_1 \frac{f_1'}{D}$ car $f_1' \ll D$

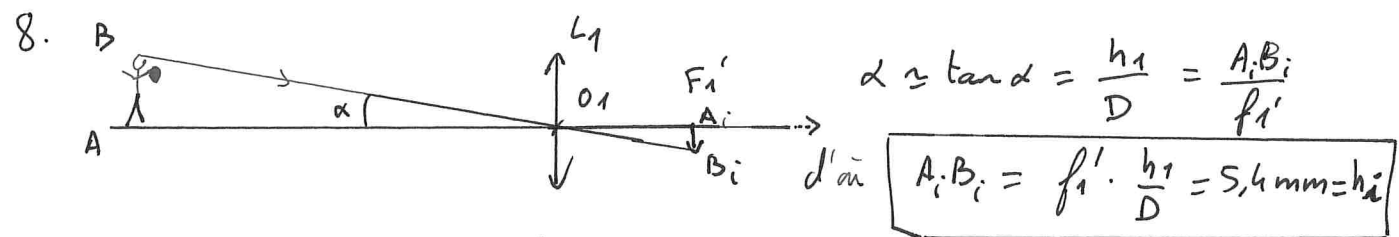
Pour augmenter $|h_1'|$, il faut augmenter f_1' . ($f_1' > f_1$)

6. On a donc: $f_2' = 4 \times f_1' = 240 \text{ mm.}$

$h_2' = -h_2 \frac{f_2'}{D} = -21,6 \text{ mm.}$
 $\overline{O_2C} \approx \overline{O_2F_2'} = 240 \text{ mm.}$

L'image du joueur est 4 fois plus grande.
 L'objectif avec une grande focale est très encombrant.

7. cf figure annexe: $\overline{O_3F'} \approx 60 \text{ mm.}$



On retrouve le résultat de la question 6.

9. On a: $\infty \xrightarrow{L_1} F_1' \xrightarrow{L_2} F'$: l'image finale est en F'

Il y a 3 formules des grandissements pour L_2 :

$\gamma_3 = \frac{h_3'}{h_i} = \frac{\overline{F_3'F}}{f_3} = \frac{f_3'}{\overline{F_3F_1'}} = \frac{\overline{O_3F'}}{\overline{O_3F_1'}}$ mais la position de F' est mal connue (lecture sur la figure)

On privilégie donc: $\gamma_3 = \frac{f_3'}{\overline{F_3F_1'}}$ avec $\overline{F_3F_1'} = \overline{F_3O_3} + \overline{O_3O_1} + \overline{O_1F_1'}$
 $= f_3' - e + f_1' = -5 \text{ mm.}$

Finalemment $\gamma_3 = \frac{b_3'}{\overline{F_3 F_1'}} = +4$. La présence de la

lentille divergente permet de multiplier par 4 la taille de l'image sur le capteur

$$h_3' = h_i \times \frac{b_3'}{b_3' + f_1' - e} = 4 \cdot h_i = 21,6 \text{ mm.}$$

10. $O_1 C = \overline{O_1 O_3} + \overline{O_3 F'} \approx 45 + 60 \approx \boxed{105 \text{ mm} = O_1 C}$

Le téléobjectif avec 2 lentilles permet d'avoir autant de détails (m taille par l'image) que la lentille L_2 mais avec un encombrement beaucoup moins important.

Annexe pour la question IV.7 :

