

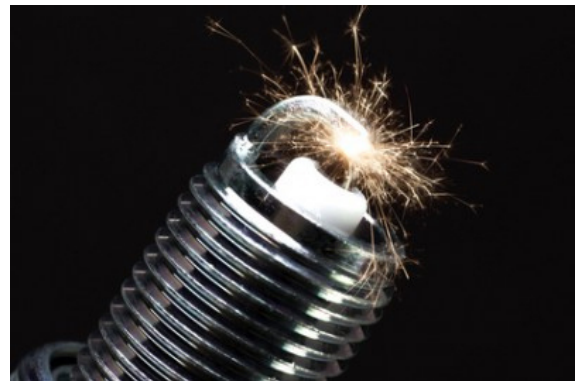
DEVOIR SURVEILLE N°3

PHYSIQUE

I. Régime transitoire du 2^{ème} ordre : étude d'une bougie électrique

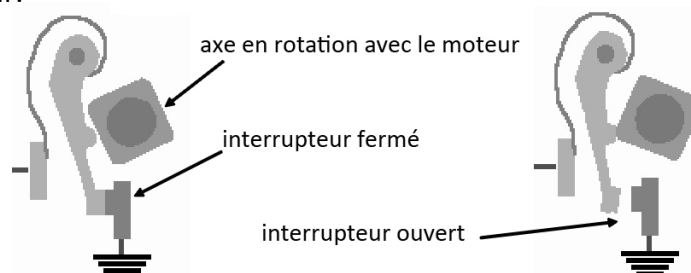
Pour s'enflammer, le mélange air-essence contenu dans les cylindres d'un moteur doit subir une élévation de température permettant de porter une partie de sa masse au-dessus de sa température d'inflammation ($T_i = 380^\circ\text{C}$).

Historiquement, dans les premiers moteurs, cette élévation de température était réalisée par une lame de platine chauffée au rouge par un brûleur. Dans les moteurs modernes, c'est une bougie d'allumage qui est utilisée et l'inflammation du mélange air-essence est provoquée par un arc électrique (étincelle) qui jaillit entre deux électrodes. L'étincelle élève localement la température du mélange et génère son inflammation, provoquant la combustion dans l'ensemble du cylindre.

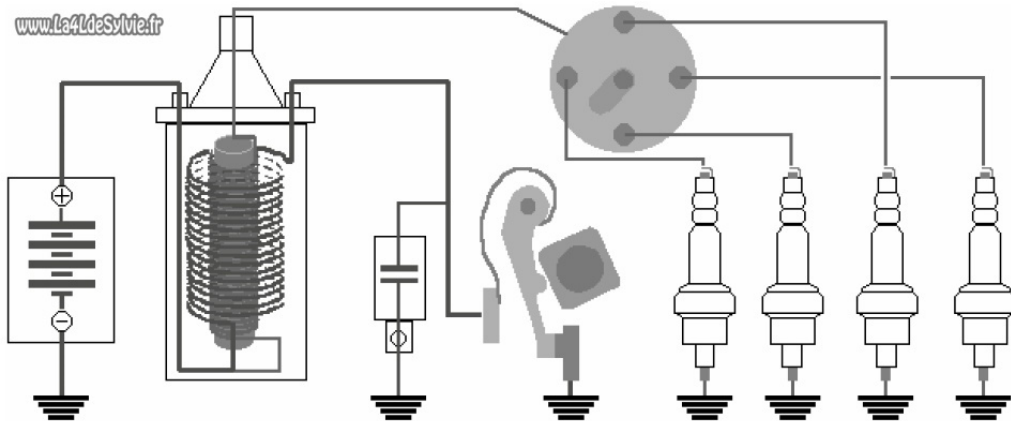


Le mélange gazeux air-essence est un isolant électrique. Toutefois, s'ils sont soumis à de très fortes tensions, les électrons des molécules constituant le mélange gazeux peuvent être arrachés à leur orbite de valence. Le mélange gazeux devient alors conducteur et le passage d'un courant électrique dans le gaz provoque une étincelle.

Pour générer une tension suffisamment élevée, on se propose d'utiliser un circuit RLC série alimenté par la batterie de la voiture. Celle-ci se comporte comme un générateur de tension de f.é.m $E_0 = 12\text{ V}$. Un astucieux système d'interrupteur commandé par la rotation du moteur permet d'ouvrir et de fermer régulièrement le circuit. L'interrupteur s'ouvre et se ferme en fonction de la position angulaire du moteur.



On donne ci-dessous le principe de fonctionnement du circuit de commande de l'allumage de quatre bougies (une par cylindre du moteur) :



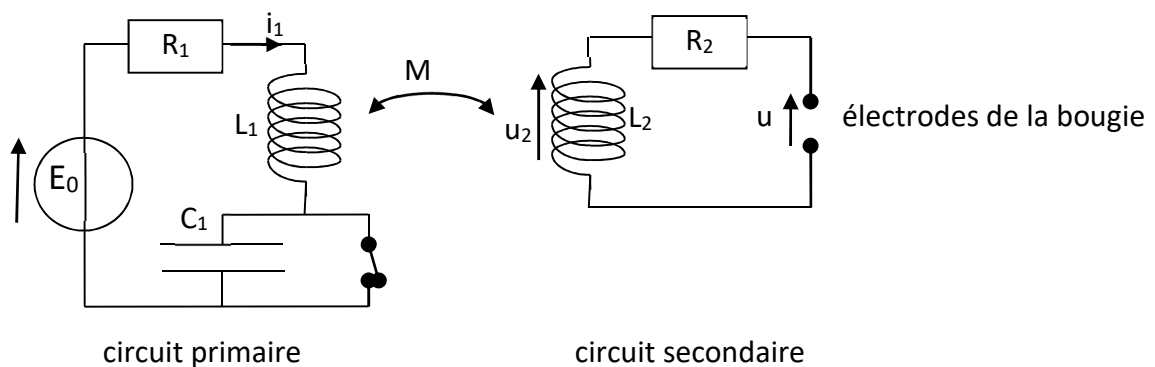
Il est constitué de deux circuits électriques distincts, qualifiés de circuits primaire et secondaire :

- le circuit primaire est constitué de la batterie, d'une bobine d'inductance L_1 , d'un condensateur de capacité C_1 , d'une résistance R_1 (non représentée) et l'interrupteur commandé par la rotation du moteur,
- le circuit secondaire est constitué d'une bobine d'inductance L_2 , d'une résistance R_2 (non représentée), et une bougie électrique assimilée à un interrupteur ouvert tant qu'il n'y a pas d'étincelle.

Les bobines des circuits primaire et secondaire appartiennent à des circuits électriques différents mais sont couplées par le phénomène d'induction magnétique.

En notant M le coefficient de couplage, on admet que, tant qu'il n'y a pas d'étincelle ($i_2 = 0$), la tension u_2 aux bornes de la bobine du circuit secondaire est de la forme $u_2 = M di_1/dt$ en notant i_1 l'intensité du courant dans le circuit primaire.

Voici donc le schéma équivalent au circuit électrique en l'absence d'étincelle :



Pour les applications numériques, on utilisera les données numériques suivantes :

- | | | | |
|------------------------------|-----------------------|--------------------------|----------------------|
| $R_1 = 3 \Omega$ | $L_1 = 14 \text{ mH}$ | $C_1 = 0,22 \mu\text{F}$ | $E_0 = 12 \text{ V}$ |
| $R_2 = 11,5 \text{ k}\Omega$ | $L_2 = 29 \text{ H}$ | $M = 0,5 \text{ H}$. | |

A. Étude du circuit primaire

1. En faisant l'hypothèse que le circuit fonctionne en régime permanent (hypothèse n°1), exprimer puis calculer l'intensité du courant $i_{1,0}$ dans le circuit primaire lorsque l'interrupteur est fermé.

2. On note $t = 0$, l'instant où l'interrupteur s'ouvre. Etablir l'équation différentielle vérifiée par l'intensité du courant $i_1(t)$ dans le circuit primaire pour $t \geq 0$.

Mettre cette équation sous la forme canonique :

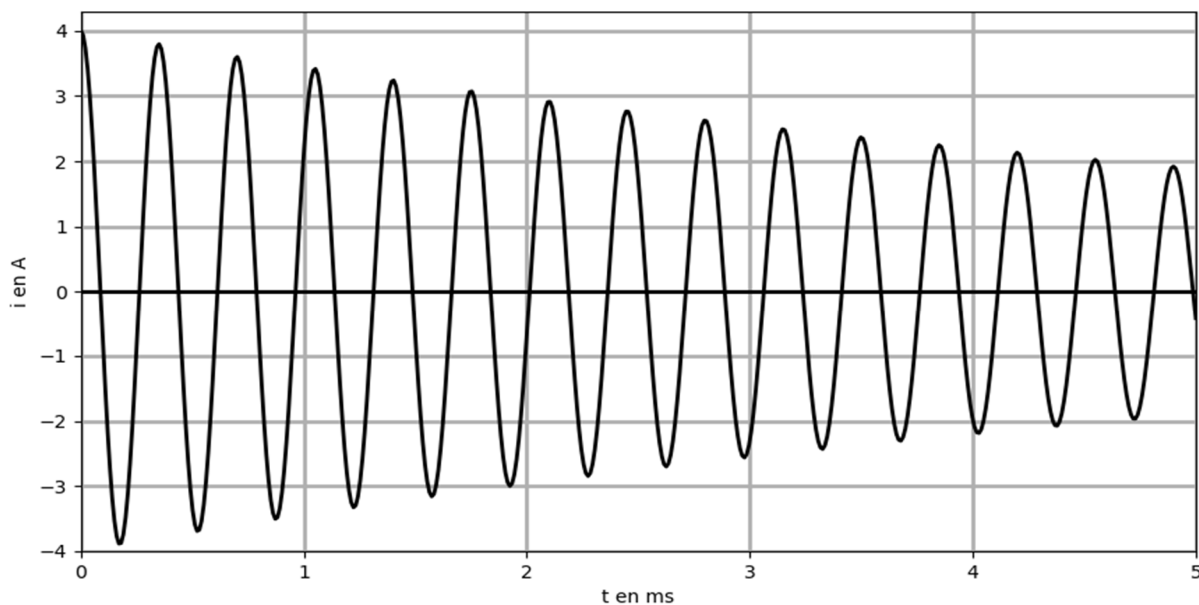
$$\frac{d^2 i_1}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{di_1}{dt} + \omega_0^2 i_1 = 0$$

Donner l'expression et la valeur numérique de chaque paramètre apparaissant dans l'équation canonique.

3. Résoudre l'équation et donner l'expression de $i_1(t)$ pour $t \geq 0$. Simplifier les expressions des constantes introduites en tenant compte de la valeur très élevée du facteur de qualité du circuit [on pourra s'appuyer sur les A.N si la simplification littérale n'est pas facile].

4. Tracer l'allure des variations de $i_1(t)$ en considérant que l'interrupteur reste ouvert suffisamment longtemps pour que l'on puisse considérer que le régime permanent est atteint avant que l'interrupteur soit à nouveau fermé (hypothèse n°2). Exprimer puis calculer la constante de temps caractéristique τ de décroissance de l'amplitude et la faire apparaître sur la courbe. Calculer également la pseudo-période des oscillations.

5. Un enregistrement du $i_1(t)$ pour $t \geq 0$ lorsque l'interrupteur est ouvert, est donné ci-dessous :



Déterminer la valeur numérique de la pulsation propre ω_0 et du facteur de qualité Q de ce circuit. On pourra utiliser le décrément logarithmique δ défini par :

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{i_1(t) - i_{1\infty}}{i_1(t + nT) - i_{1\infty}} \right)$$

B. Étude du circuit secondaire

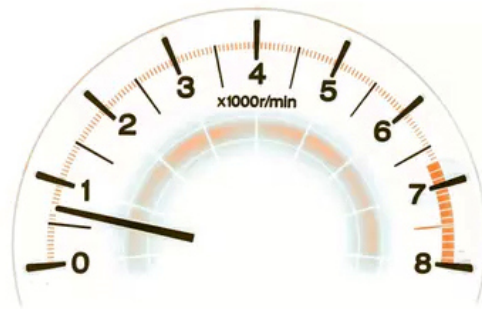
6. Déterminer la tension $u(t)$ aux bornes des électrodes de la bougie lorsque l'interrupteur est ouvert ($i_2 = 0$) en exploitant l'expression de $i_1(t)$ obtenue à la question précédente. Simplifier l'expression de $u(t)$ en tenant compte de la valeur très élevée du facteur de qualité du circuit.

7. Une étincelle apparaît entre les électrodes de la bougie lorsque le champ électrique E qui règne entre ses électrodes est supérieur à une valeur dite de claquage égale à $3,6 \times 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$. On admettra que la tension u aux bornes des électrodes et le champ électrique E entre les électrodes sont liés par la relation : $u = E \times d$ où d est la distance entre les électrodes.

En déduire la distance maximale entre les deux électrodes pour qu'une étincelle apparaisse entre les électrodes de la bougie d'allumage.

C. Discussion complémentaire

Le moteur d'une voiture peut tourner à $\omega = 6000 \text{ tr/min}$ sans aucun problème.

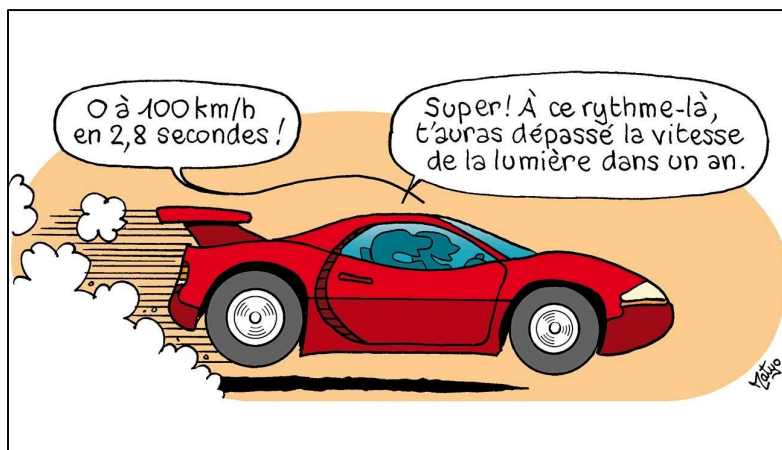


8. Sachant que l'étincelle dans un cylindre du moteur ne doit se produire qu'une fois tous les deux tours, calculer la durée Δt entre deux étincelles dans un cylindre lorsque $\omega = 6000 \text{ tr/min}$.

9. Discuter l'hypothèse n°1 faite à la question 1.

10. Discuter l'hypothèse n°2 faite à la question 3.

11. La distance entre les électrodes des bougies électriques est de l'ordre de 0,7 mm. Discuter de ce choix en traçant l'allure probable de $i_1(t)$ lors d'un fonctionnement en régime élevé ($\omega = 6000 \text{ tr/min}$).



II. Etude d'un circuit RLC réel en régime sinusoïdal forcé :

En travaux pratiques nous avons étudié un circuit RLC série composé d'un condensateur de capacité $C = 50 \text{ nF}$, d'une résistance $R = 100 \Omega$ et d'une bobine d'inductance $L = 40 \text{ mH}$ et dont la résistance de bobinage était $R_b = 10 \Omega$.

Ce circuit était alimenté par un GBF [de la marque Rigol] supposé idéal dans un premier temps qui impose une tension $e(t) = e_m \cos(\omega t)$ avec $e_m = 5 \text{ V}$.

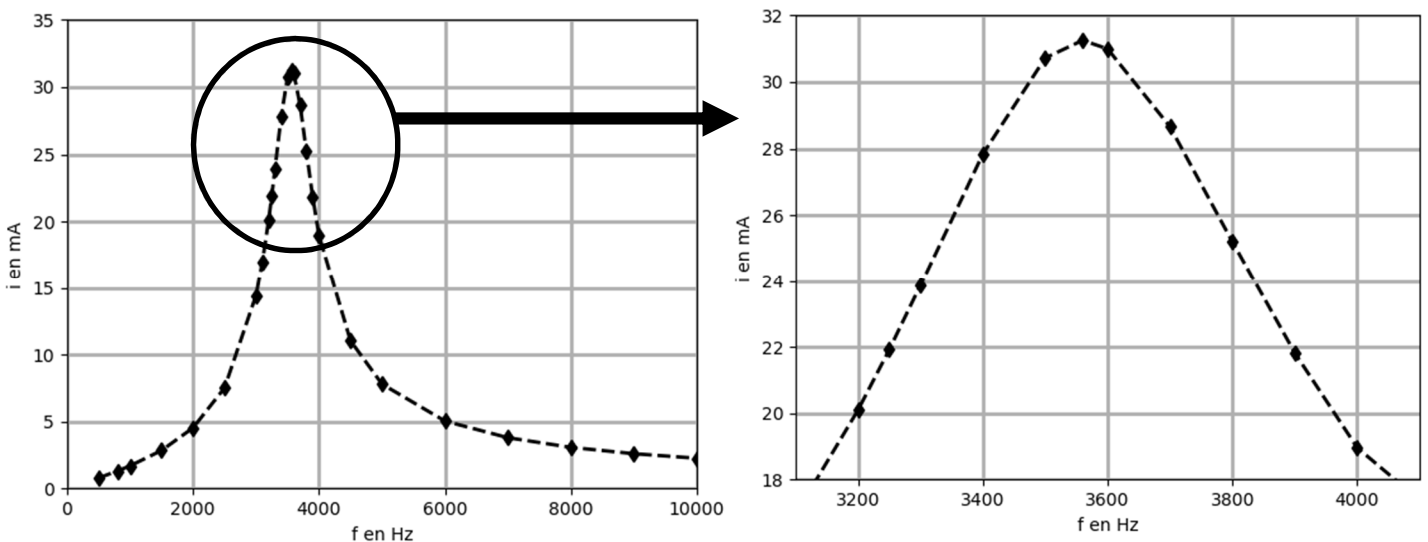
Un oscilloscope était branché afin d'observer la tension aux bornes du générateur sur la voie 1 et aux bornes de la résistance R sur la voie 2.

1. Faire un schéma du montage en faisant apparaître la masse du circuit.
2. Expliquer ce qu'est la synchronisation de l'oscilloscope et donner la raison pour laquelle on branche le GBF sur la voie n°1 de l'oscilloscope (et non sur la voie n°2).
3. Etablir l'expression de l'amplitude complexe \underline{i}_m de l'intensité dans le circuit. [faire apparaître i sur le schéma du circuit donné à la question 1].

A. Etude de l'amplitude de l'intensité

4. En déduire l'expression de l'amplitude i_m du courant réel et déterminer la pulsation, notée ω_0 pour laquelle i_m est maximale. Faire l'A.N. Quelle est la valeur du maximum de i_m , noté i_{MAX} ?
5. Déterminer les asymptotes BF et HF de i_m et tracer l'allure de la courbe $i_m(\omega)$.
6. Définir la bande passante et les pulsations de coupure ω_1 et ω_2 de i_m . Déterminer les expressions de ω_1 et ω_2 (avec $\omega_1 < \omega_2$) et faire les A.N.
7. Définir le facteur de qualité Q de ce circuit et donner sa valeur numérique.

Un relevé expérimental de i_m donne la courbe suivante :



En plus des valeurs régulièrement espacées de la fréquence, on a rajouté des points de mesure autour de la résonance de l'intensité.

8. Par lecture sur la courbe, donner la valeur de la fréquence de résonance $f_{0,exp1}$ et du facteur de qualité expérimental Q_{exp1} . Evaluer l'incertitude type sur votre mesure de $f_{0,exp1}$.

9. Sachant que la précision sur les valeurs des composants est de 1 %, la valeur expérimentale de $f_{0,exp1}$ est-elle compatible avec celle obtenue par le calcul à la question 4 ?

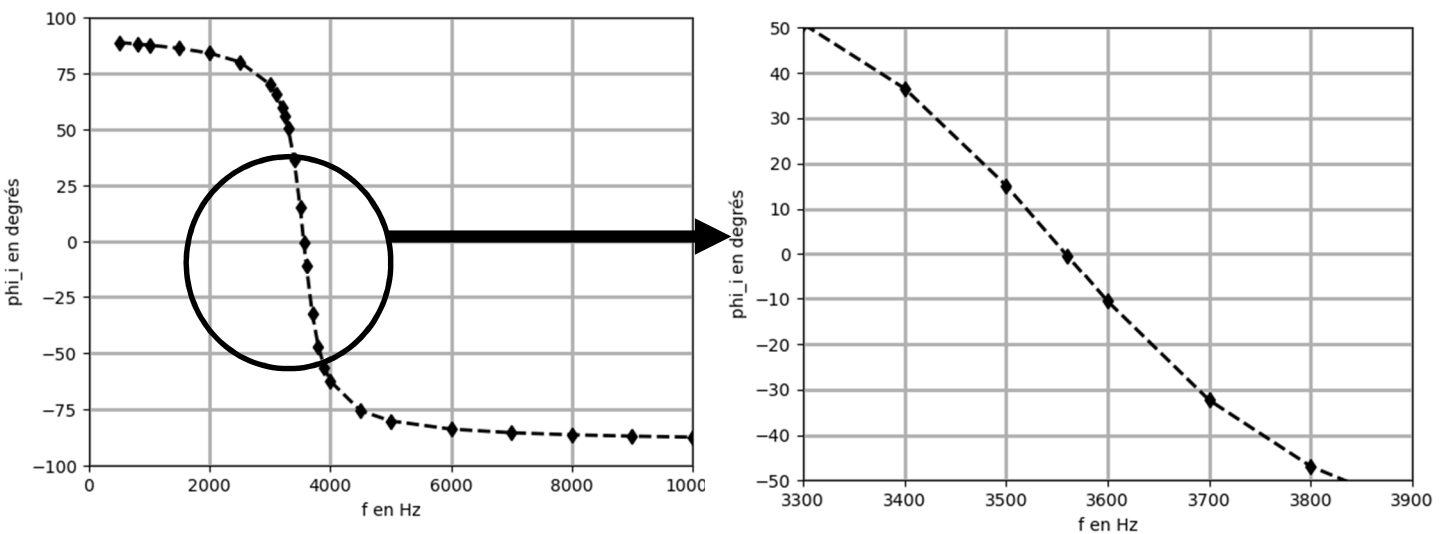
10. Sans se pencher sur le calcul d'incertitudes, la valeur de Q_{exp1} paraît-elle compatible avec celle calculée à la question 7 ? Proposer une explication.

B. Etude du déphasage de l'intensité par rapport à la tension du générateur

11. Déterminer l'expression du déphasage φ_i de \underline{i} par rapport à la tension du générateur.

12. Calculer les valeurs de φ_i aux BF, aux HF et à la résonance. Déterminer également la valeur de φ_i aux pulsations de coupure ω_1 et ω_2 . En déduire l'allure de la courbe $\varphi_i(\omega)$.

Un relevé expérimental de φ_i donne la courbe suivante :



13. Par lecture sur la courbe, donner la valeur de la fréquence de résonance $f_{0,exp2}$ et du facteur de qualité expérimental Q_{exp2} .

14. Sans se pencher sur le calcul d'incertitudes, la valeur de Q_{exp2} paraît-elle compatible avec celle calculée à la question 7 ? Et avec celle trouvée à la question 8 (Q_{exp1}) ? Proposer une explication.

C. Etude sommaire de la tension aux bornes de la bobine

15. Déterminer l'expression de la tension complexe \underline{u}_b aux bornes de la bobine réelle (association de L et R_b).

16. Déterminer les asymptotes BF et HF de l'amplitude u_{bm} de la tension aux bornes de la bobine réelle à partir de l'expression de u_{bm} puis à partir du comportement du circuit en BF et HF.

17. Aux hautes fréquences le comportement de la bobine est plus complexe que prévu. Une capacité parasite C_b apparaît entre les spires de la bobine. Le modèle de la bobine doit donc être complété aux HF par la prise en compte de la capacité parasite C_b en dérivation avec l'ensemble L et R_b .

Par analyse du comportement du circuit, déterminer l'asymptote finalement observée en très hautes fréquences (THF) pour la tension aux bornes de la bobine.

III. Accordeur de guitare (d'après Centrale TSI 2019) :

Nous allons étudier quelques aspects d'un accordeur électronique de guitare.

La guitare comporte six cordes correspondant aux 6 notes suivantes Mi grave, La, Ré, Sol, Si, Mi aigu dont les fréquences fondamentales de référence sont les suivantes :

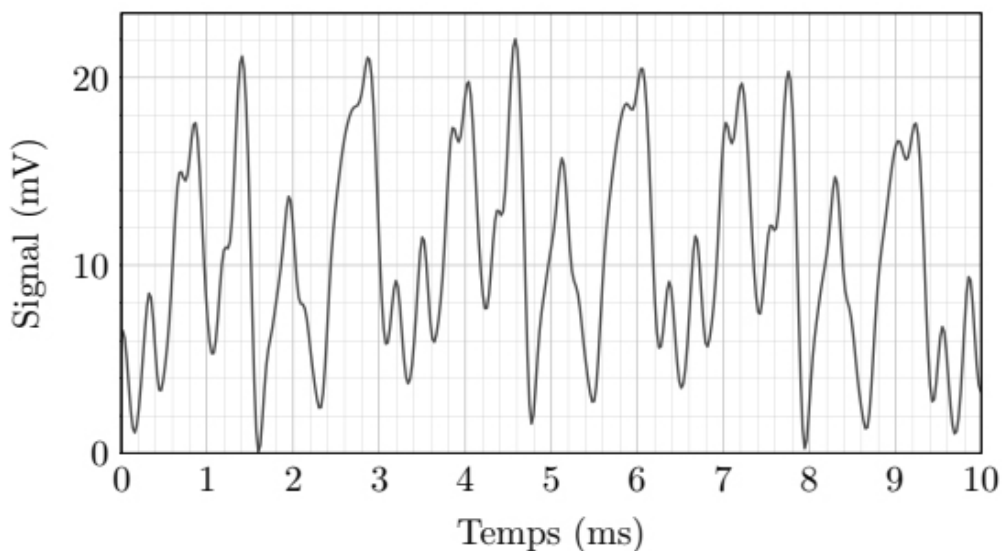
| Corde | Fréquence (Hz) |
|----------|----------------|
| Mi grave | 82,4 |
| La | 110 |
| Ré | 146,8 |
| Sol | 196 |
| Si | 246,9 |
| Mi aigu | 329,6 |

On souhaite accorder une corde *légèrement* désaccordée : on notera f_1 la fréquence fondamentale de vibration de la corde en question.

Le principe général est **d'extraire la fréquence fondamentale f_1** du signal émis par la corde de la guitare et de la comparer à la fréquence f_0 de référence.

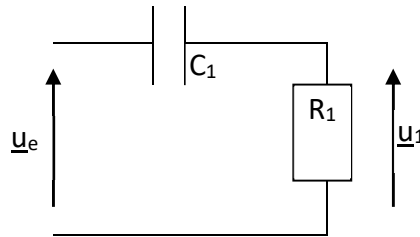
Dans les accordeurs récents le traitement est numérique : un calculateur numérique calcule l'écart de fréquence ($f_1 - f_{1,th}$) et indique à l'utilisateur quand la corde est accordée, c'est-à-dire quand $f_1 = f_{1,th}$. Nous allons nous intéresser à la mise en forme du signal capté par le micro avant sa numérisation.

La figure ci-dessous montre le signal électrique u_e produit par le micro de l'accordeur de guitare :



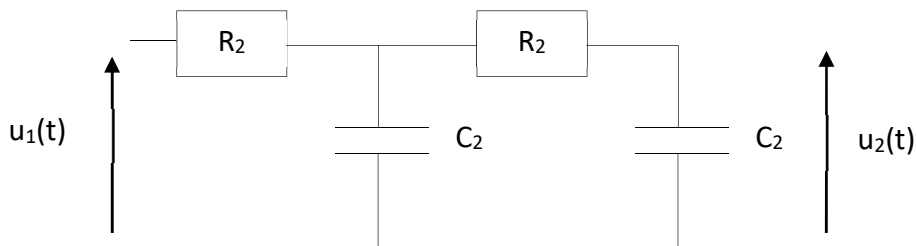
1. Donner une valeur approchée de la valeur moyenne et de l'amplitude de ce signal.
2. Donner une estimation de la valeur de la fréquence de ce signal (on peut supposer qu'en première approximation le signal est périodique). De quelle corde de la guitare s'agit-il ?

Le signal électrique u_e produit par le micro de l'accordeur de guitare est envoyé sur le filtre F_1 de la figure ci-contre :



3. Déterminer qualitativement la nature de ce filtre.
4. Établir l'expression de la fonction de transfert $\underline{H}_1 = \underline{u}_1/\underline{u}_e$ de ce filtre.
5. Déterminer l'expression de la fréquence de coupure notée f_c à l'aide de la forme canonique de ce type de filtre. Faire l'A.N. pour $R_1 = 100 \text{ k}\Omega$ et $C_1 = 100 \text{ nF}$.
6. Déterminer les équations des asymptotes du diagramme de Bode du gain en dB. Déterminer leur point I d'intersection. Exprimer le gain en dB du filtre G_{dB} en fonction de f puis le calculer pour la fréquence f_c .
7. Déterminer le déphasage φ en fonction de ω puis les équations des asymptotes du diagramme de Bode de la phase φ . Calculer la phase pour la fréquence f_c .
8. Tracer l'allure du diagramme de Bode (gain en dB et phase) de ce filtre en fonction de la fréquence. Quel est l'effet de ce filtre sur le signal u_e ?

On souhaite désormais sélectionner la fréquence fondamentale f_1 du signal $u_1(t)$. Pour cela, le signal $u_1(t)$ est appliqué sur un deuxième filtre noté F_2 présenté ci-dessous :



9. Étudier le comportement asymptotique de ce filtre et en déduire sa nature.
10. Déterminer l'expression de la fonction de transfert \underline{H}_2 de ce filtre et montrer qu'elle peut se mettre sous la forme :

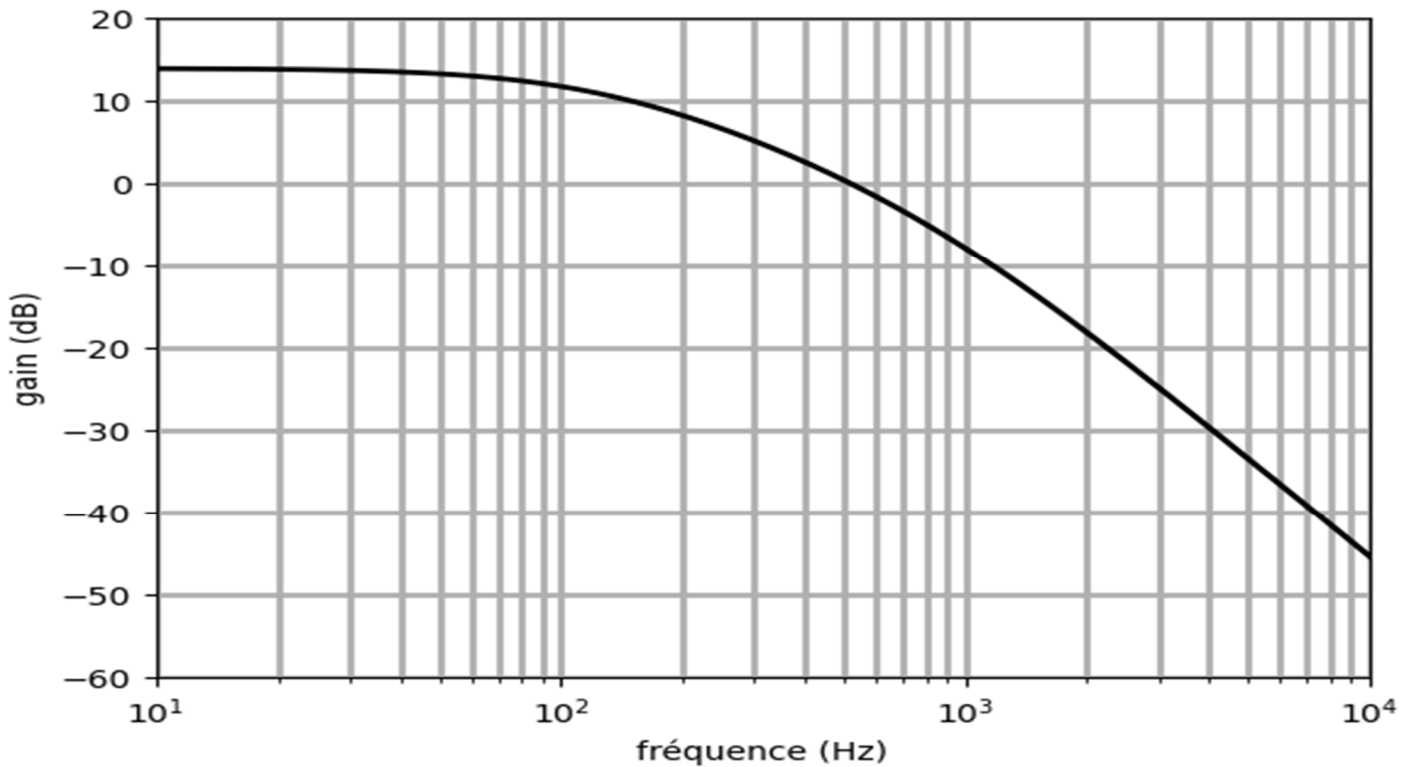
$$\underline{H}_2 = \frac{H_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

Exprimer le gain passant H_0 , le facteur de qualité Q et la pulsation propre ω_0 .

11. Établir l'équation des asymptotes BF et HF du gain en dB en fonction de la pulsation réduite $x = \omega/\omega_0$. Déterminer les pentes des asymptotes et les coordonnées du point I d'intersection de ces dernières.

12. Exprimer le gain en dB du filtre G_{dB} puis le calculer pour $x = 1$ et en déduire l'allure du diagramme de Bode relatif au gain en dB en fonction de x .

On réalise un filtre F_3 possédant une fonction de transfert identique à celle du filtre F_2 étudié ci-dessus à l'exception du gain passant H_0 qui prend une valeur différente. Le diagramme de Bode du gain en dB est donné ci-dessous :



13. Relever la pente de l'asymptote HF ainsi que la fréquence de **coupure** f_{c3} . Préciser la méthode de lecture utilisée.

14. En détaillant la méthode suivie, déterminer les valeurs des caractéristiques de ce filtre (H_{03} , f_{03} et Q_3). On admettra que H_{03} est positif.

La suite du traitement du signal pour mesurer la différence entre la fréquence jouée et la fréquence théorique sera étudiée dans un prochain devoir (ou pas !).



RAPPELS SUR LES INCERTITUDES

Incertitude-type de type B (mesure unique) :

- On détermine le **demi-intervalle** acceptable pour la mesure, noté **a** :
 - pour une lecture sur une **échelle graduée** (règle, thermomètre gradué, palmer...) :

$$a = 1/2 \text{ graduation}$$
 - pour un **appareil de mesure** à affichage digital (voltmètre, thermomètre électronique, ...) :
 a est appelé **précision** et est donné par la **notice**
 - pour un **composant** (résistances, condensateurs, bobines, ...) :
 a est appelé **tolérance** et est donné par le **fabricant**
 - pour une **évaluation directe par l'utilisateur** entre x_1 et x_2 :

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{et le demi-intervalle } a = \frac{x_2 - x_1}{2}$$

- L'incertitude-type de la mesure est donnée par :

$$u_B = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Comparaison d'une mesure : x_1 ; $u(x_1)$

| avec une valeur de référence x_{ref} | avec une autre mesure : x_2 ; $u(x_2)$ |
|--|--|
| On détermine l' écart normalisé ou z-score : | |
| $z = \frac{ x_1 - x_{ref} }{u(x_1)}$ | $z = \frac{ x_1 - x_2 }{\sqrt{u(x_1)^2 + u(x_2)^2}}$ |
| <p>Si $z < 2$, on considère qu'il y a compatibilité</p> <p>Si $z \geq 2$, on considère qu'il y a incompatibilité et il faut chercher la cause.</p> | |

Propagation des incertitudes dans les calculs

Une seule variable : $Y = f(X)$

Relation affine : si $Y = aX + b$ alors $u(Y) = |a| u(X)$

Relation de puissance : si $Y = aX^n$ alors $\frac{u(Y)}{Y} = |n| \frac{u(X)}{X}$

Deux variables : $Y = f(X_1, X_2)$

Combinaison linéaire : si $Y = aX_1 + bX_2$ alors $u(Y) = \sqrt{(a u(X_1))^2 + (b u(X_2))^2}$

Monôme : si $Y = X_1^a X_2^b$ alors $\frac{u(Y)}{Y} = \sqrt{\left(\frac{a u(X_1)}{X_1}\right)^2 + \left(\frac{b u(X_2)}{X_2}\right)^2}$