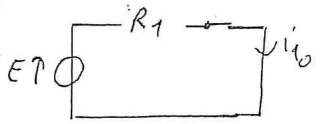
PCSI 1 23.24

DS n° 3

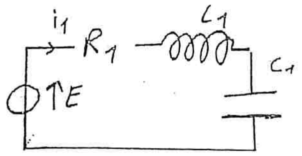
I. Transitoire du 2^e ordre : bougie électrique

1. En régime établi $L \Leftrightarrow$ —— donc le circuit primaire devient :



D'où $\boxed{i_{10} = \dfrac{E}{R_1} = 4{,}0\ \text{A}}$

2. Pour $t \geq 0$:



c'est un RLC série !

Loi des mailles : ① $E = R_1 i_1 + L_1 \dfrac{di_1}{dt} + u_{C_1}$ avec $i_1 = C_1 \dfrac{du_{C_1}}{dt}$ ②

. soit on dérive ① et on injecte ② : $0 = R_1 \dfrac{di_1}{dt} + L_1 \dfrac{d^2 i_1}{dt^2} + \dfrac{i_1}{C_1}$

. soit on injecte ① dans ② : $i_1 = C_1 \dfrac{d}{dt}\left(E - R_1 i_1 - L_1 \dfrac{di_1}{dt}\right) = -R_1 C_1 \dfrac{di_1}{dt} - L_1 C_1 \dfrac{d^2 i_1}{dt^2}$

Dans tous les cas on arrive à :

$$\boxed{\frac{d^2 i_1}{dt^2} + \frac{R_1}{L_1}\frac{di_1}{dt} + \frac{1}{L_1 C_1} i_1 = 0}$$

Si on identifie avec la forme canonique on obtient :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{R_1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}} = 84 \gg 1.$$

AN : $\omega_0 = 18.10^3$ rad/s.

3. Il s'agit d'un oscillateur très peu amorti

$$\Delta' = \left(\frac{R_1}{2L_1}\right)^2 - \frac{1}{L_1 C_1} \simeq -\frac{1}{L_1 C_1} \quad \left[\text{ou } \Delta' = \left(\frac{\omega_0}{2Q}\right)^2 + \omega_0^2 \simeq -\omega_0^2\right]$$

Le régime est pseudo périodique et les racines sont

$$r_\pm = -\frac{R_1}{2L_1} \pm i\sqrt{-\Delta'} = -\frac{R_1}{2L_1} \pm i\omega_0 \quad [\text{on a } \Omega \simeq \omega_0]$$

La solution est

$$i_1(t) = e^{-\frac{R_1}{2L_1} t}\left(A \cos\omega_0 t + B \sin\omega_0 t\right)$$

les CI sont
$\begin{cases} i_1(0^+) = i_1(0^-) = i_{10} = \dfrac{E}{R_1} & \text{par continuité de } i_L \\ u_{C_1}(0^+) = u_{C_1}(0^-) = 0 & \text{—— ———— — } u_C \end{cases}$

Donc ① écrite en $t=0^+$ donne $E = R_1 \frac{E}{R_1} + L_1 \frac{di_1}{dt}(0^+) + 0$

D'où $\boxed{\frac{di_1}{dt}(0) = 0}$

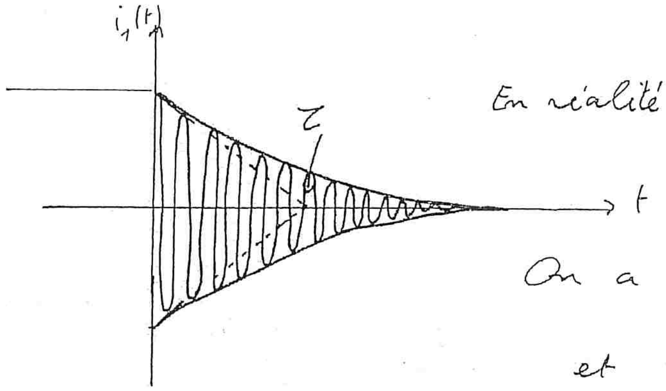
D'où $A = E/R_1$ et $0 = -A\frac{R_1}{2L_1} + \omega_0 B$

$\left[\text{ou } 0 = -\frac{\omega_0}{2Q} A + \omega_0 B\right]$

D'où $A = \frac{E}{R_1} = 4{,}0\,A$ et $B = \frac{E}{2L_1\omega_0} = 0{,}024\,A$ $= \frac{A}{2Q} \ll A$

$\Rightarrow \boxed{i_1(t) = \frac{E}{R_1} e^{-\frac{R_1}{2L_1}\cdot t} \cos\omega_0 t}$

4.



En réalité il faudrait qu'environ 80 osc. soient visibles !

On a $\boxed{\tau = \frac{2Q}{\omega_0} = 9{,}3\,ms}$

et $\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 0{,}35\,ms.}$

5. On lit facilement la période des oscillations et δ :

$T = \frac{4\,ms}{11{,}5} = 0{,}35\,ms \Rightarrow \boxed{\omega_0 \simeq \Omega = \frac{2\pi}{T} = 18.10^3\,rad.s^{-1}}$

$\delta = \frac{1}{13} \ln \frac{4}{2} = 0{,}053$

Or $\delta = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{i_{1m} \cos\omega_0 t\, e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}}{i_{1m}\cos(\omega_0 t + nT)\, e^{-\frac{\omega_0 (t+nT)}{2Q}}}\right) = \frac{\omega_0 T}{2Q} \simeq \frac{\pi}{Q}$

D'où $\boxed{Q = \frac{\pi}{\delta} \simeq 60}$ C'est un peu inférieur à la valeur théorique : il doit y avoir des résistances parasites non prises en compte.

6. . Le circuit est ouvert donc $i_2 = 0$ et

$u(t) = u_2(t) = M\frac{di_1}{dt} = M.\frac{E}{R_1} e^{-\frac{R_1 t}{2L_1}} \left(-\frac{R_1}{2L_1}\cos\omega_0 t - \omega_0 \sin\omega_0 t\right)$

or $\frac{R_1}{2L_1} = \frac{\omega_0}{2Q} \ll \omega_0$ donc $\boxed{u(t) \simeq -\omega_0 \frac{M.E}{R_1} e^{-\frac{R_1 t}{2L_1}} \sin\omega_0 t}$

7. On cherche la valeur maximale de $u(t)$ pour voir l'écartement maximal entre les électrodes. Or l'amortissement des oscillations est très lent ($\tau \ll T_0$) donc le premier passage par le maximum a lieu à $t = \frac{T_0}{4}$ et $e^{-\frac{R_1}{2L_1}\cdot\frac{T_0}{4}} \simeq 1$

D'où $\boxed{u_{max} = \omega_0 \frac{M.E}{R_1} = 36.10^3\ V}$

Il faut donc un <u>écartement inférieur à un 1 cm</u> entre les électrodes de la bougie pour que le passage par u_{max} permette l'apparition d'une étincelle.

8. Lorsque le moteur tourne à 6000 tr/min ($\omega = 6.10^3$ tr.min^{-1} $= 628$ rad.s^{-1}) la durée d'un tour est de 10 ms. ($T = \frac{2\pi}{\omega}$)

Un cycle moteur comporte 2 allers-retours (moteur "4 temps") et l'interrupteur s'ouvre donc toutes les $2\times10 = \boxed{20\ ms}$

9. <u>Hypothèse 1</u> : on suppose que l'interrupteur reste fermé suffisamment longtemps pour que le régime établi stationnaire soit atteint.

C'est un système du 1er ordre (RL) donc $\tau_1 = \frac{L_1}{R_1} = 4{,}7$ ms et il faut quelques τ_1 pour atteindre le régime établi : quelques $\tau_1 = 20$ ms.

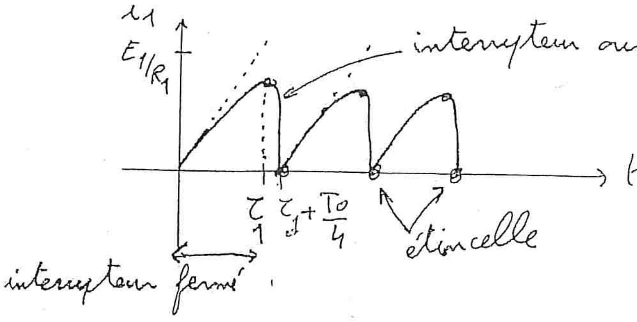
On en déduit que <u>l'hypothèse 1 est valide</u>. La bascule de l'interrupteur se produit lorsque $i_1 \simeq E/R_1$

10. <u>Hypothèse 2</u> : on suppose que l'interrupteur reste ouvert assez longtemps pour que $i_1(t)$ atteigne le régime établi.

Le pb est le même avec $\tau = \frac{2Q}{\omega_0} = 9{,}3$ ms.

L'hypothèse 2 est alors fausse mais cela n'a pas d'importance pour le fonctionnement du moteur car il suffit juste que $u(t)$ atteigne une fois son maximum pour que l'étincelle se produise : il suffit d'une durée de l'ordre de $\frac{T_0}{4} = 0{,}1$ ms.

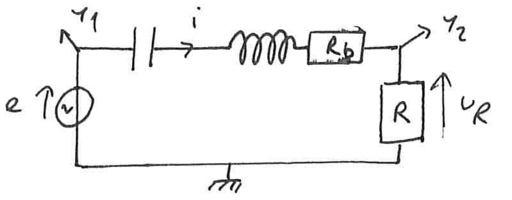
11 - La valeur proposée (0,7 mm) est 14 fois inférieure à la valeur maximale : la marge est suffisante pour que l'étincelle ait lieu m̂ si $i_{10} \neq E_1/R_1$ (et donc $u < 36.10^3 V$).



interrupteur ouvert sur un quart de période des osc.

$\Rightarrow$ i_1 arrive à 0 et u est maximale $\Rightarrow$ étincelle. On repart alors sur une augmentation de i_1 avec l'interrupteur fermé.

II Circuit RLC étudié en TP :

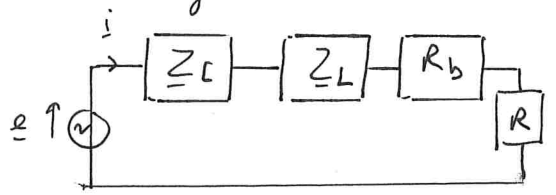
1. 

⚠ il faut que R soit reliée à la masse du GBF pour pouvoir observer u_R à l'oscilloscope.

2. Par défaut la synchronisation de l'oscilloscope se fait sur la voie 1. Le signal du générateur étant d'une amplitude importante et faiblement bruité, il vaut mieux que la synchronisation se fasse sur cette voie.

[rappel : la synchronisation est un réglage interne qui assure que la période de balayage de l'écran soit un multiple de celle du signal. Cela permet au spot lumineux de repasser sur la même trace à chaque traversée de l'écran. L'image est donc stable. Le seuil de déclenchement de la traversée est réglable avec le bouton Trigger.].

3. En régime sinusoïdal forcé, on peut passer en $\mathbb{C}$:



D'après Pouillet :

$$\underline{i} = \frac{\underline{e}}{R + R_b + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C}$$

avec $\underline{e} = e_m e^{j\omega t}$ et $\underline{i} = \underline{i}_m e^{j\omega t}$

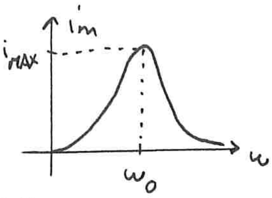
D'où $\boxed{\underline{i}_m = \dfrac{e_m}{R + R_b + j\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)}}$

4. $$i_m = |\underline{i}_m| = \frac{e_m}{\sqrt{(R+R_b)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

i_m est maximal qd le dénominateur est minimal donc quand $\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) = 0$ soit pour $\boxed{\omega = \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} = 22{,}4.10^3 \text{ rad/s}}$

et $i_m(\omega_0) = \boxed{i_{MAX} = \dfrac{e_m}{R + R_b} = 45{,}5 \text{ mA.}}$

5. $i_m \xrightarrow[\omega \to 0]{BF} 0$ et $i_m \xrightarrow[\omega \to \infty]{HF} 0$. D'où :



6. . La bande-passante est l'ensemble des fréquences pour lesquelles $i_m(f) \geqslant \frac{i_{MAX}}{\sqrt{2}}$.

. ω_1 et ω_2 = pulsations de coupure = pulsations limitant la bande passante.

. Cherchons ω_1 et ω_2 :

$$\frac{e_m}{\sqrt{(R+R_b)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} = \frac{e_m}{\sqrt{2}(R+R_b)} \Rightarrow (R+R_b)^2 = \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2$$

Donc $L\omega - \frac{1}{C\omega} = -(R+R_b)$ (*) ou $L\omega - \frac{1}{C\omega} = (R+R_b)$ (**)

soit $\omega^2 + \omega\frac{R+R_b}{L} - \frac{1}{LC} = 0$ ou $\omega^2 - \omega\frac{R+R_b}{L} - \frac{1}{LC} = 0$

$\Delta = \frac{(R+R_b)^2}{L^2} + \frac{4}{LC} > 0$ idem.

donc $\omega = -\frac{R+R_b}{2L} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$ $\qquad \omega = +\frac{R+R_b}{2L} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$

Les racines positives sont : $\boxed{\omega_1 = -\frac{R+R_b}{2L} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2} = 21{,}0 \times 10^3\ rad\,s^{-1}}$

et $\boxed{\omega_2 = +\frac{R+R_b}{2L} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2} = 23{,}8 \cdot 10^3\ rad\,s^{-1}}$

7. $\boxed{Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{1}{R+R_b}\sqrt{\frac{L}{C}} = 8{,}1}$ car $\Delta\omega = \frac{R+R_b}{L}$.

8. On lit $\boxed{f_{0\,exp\,1} = 3550\ Hz}$ avec $u(f_{01}) \simeq 20\ Hz$

On lit $f_1 \simeq 3250\ Hz$, $f_2 \simeq 3900\ Hz$) valeurs de f pour lesquelles $i_m = \frac{i_{MAX}}{\sqrt{2}} = \frac{31}{\sqrt{2}} \simeq 22\ mA$.

D'où $\boxed{Q_{exp\,1} = 5{,}5} = f_0/\Delta f$

9. $f_0 = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{LC}} = 3560\ Hz$. donc $\frac{u(f_0)}{f_0} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\frac{u(L)}{L}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\frac{u(C)}{C}\right)^2}$

avec $\frac{u(C)}{C} = \frac{u(L)}{L} = \frac{p}{\sqrt{3}} = 0{,}6\%$ $\Rightarrow \frac{u(f_0)}{f_0} = 0{,}4\%$

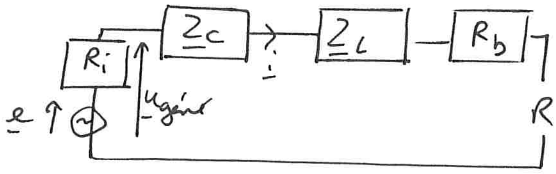
$\boxed{u(f_0) = 14\ Hz}$ Calculons le z-score :

$$z = \frac{|f_0 - f_{0\,exp}|}{\sqrt{u^2(f_0) + u^2(f_{0\,exp})}} \simeq 0{,}4 < 2$$

C'est compatible !

10. $Q_{exp1} = 5,5$ est notablement inférieur à $Q_{th} = 8,1$.

Il faut tenir compte de la résistance interne du GBF qui vaut environ $50\,\Omega$:



$$\underline{i}_m = \frac{\underline{e}_m}{R + R_b + R_i + \underline{Z}_L + \underline{Z}_c}$$

il faut donc remplacer $R + R_b$ par $\underline{R + R_b + R_i}$ ds la formule théorique. On arrive alors à $\boxed{Q'_{th} = 5,6}$

L'accord avec l'expérience est bien meilleur !

11. $\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{géné} = \arg(\underline{i}_m)$ car $\varphi_{géné} = 0$

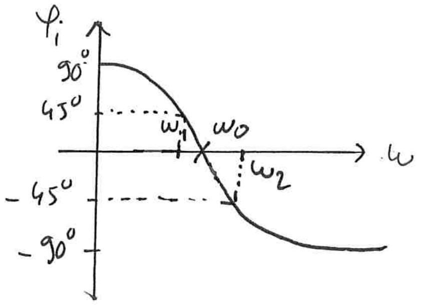
d'où $\boxed{\varphi_i = -\arctan\left(\dfrac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R + R_b}\right)}$

12. $\varphi_i \xrightarrow{BF} +\frac{\pi}{2}$; $\varphi_i \xrightarrow{HF} -\frac{\pi}{2}$

$\varphi_i(\omega_0) = 0$; $\varphi_i(\omega_1) = \frac{\pi}{4}$ et $\varphi_i(\omega_2) = -\frac{\pi}{4}$

↳ cf. (**).

↳ car $L\omega_1 - \frac{1}{C\omega_1} = -(R + R_b)$ (*)



13. On relève $\begin{cases} f_{0exp2} = 3550\ Hz \\ f_1 = 3350\ Hz \text{ et } f_2 = 3800\ Hz \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q_{exp2} = 7,9}$

14. Cette fois Q_{exp2} est en accord avec Q_{th}.

Mais $Q_{exp2} \neq Q_{exp1}$!

En effet le déphasage mesuré est bien entre i et $u_{géné}$.

Il n'y a donc pas lieu de prendre R_{int} en compte :

$$\underline{i} = \frac{\underline{e}}{R + R_b + R_{int} + \underline{Z}_c + \underline{Z}_c} \quad \text{mais} \quad \underline{i} = \frac{\underline{u}_{géné}}{\underline{R + R_b} + \underline{Z}_L + \underline{Z}_c}$$

⚠

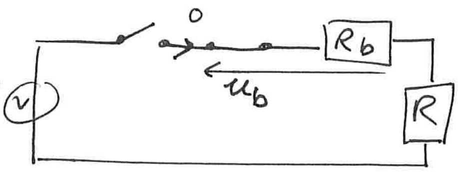
La formule théorique sans R_{int} est donc correcte pour φ_i !

15. Un diviseur de tension donne :

$$\underline{u}_b = \frac{\underline{e} \times (R_b + \underline{Z}_L)}{R + R_b + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C} \; : \; \boxed{\underline{u}_b = \underline{e} \cdot \frac{R_b + jL\omega}{R + R_b + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}}$$

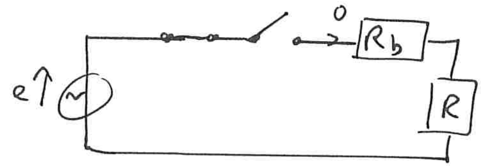
16. $$u_{bm} = e_m \cdot \frac{\sqrt{R_b^2 + L^2\omega^2}}{\sqrt{(R+R_b)^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}} \quad \left.\begin{array}{l} \xrightarrow{BF} 0 \\ \xrightarrow{HF} e_m . \end{array}\right\} \text{passe-haut.}$$

en BF le circuit équivaut à :
$(L \overset{BF}{\Longleftrightarrow}$ et $C \overset{BF}{\Longleftrightarrow})$



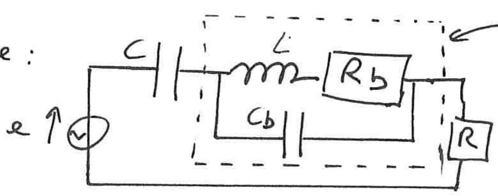
$\boxed{u_b \xrightarrow{BF} 0}.$

en HF le circuit équivaut à :
$(L \overset{HF}{\Longleftrightarrow}$ et $C \overset{HF}{\Longleftrightarrow})$

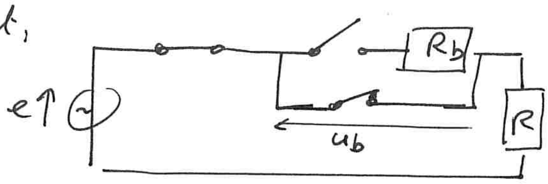


$\boxed{u_b \xrightarrow{HF} e_m}.$

17. Le modèle se complique :



En THF le circuit devient,



donc $\boxed{u_b \xrightarrow{THF} 0}.$

Finalement en très haute fréquence, à cause de cette capacité parasite interspires, la bobine ne se comporte plus en passe-haut mais en passe-bande car elle finit par couper les très hautes fréquences !

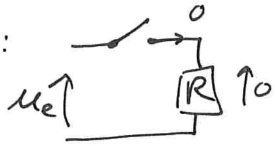
III Accordeur de guitare

1. Le signal est à peu près centré sur la valeur de 10 mV et l'amplitude est d'environ 10 mV :

$$\boxed{\langle \text{signal} \rangle \simeq 10\,\text{mV} \qquad \text{amplitude} \simeq 10\,\text{mV}}$$

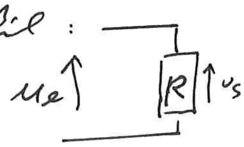
2. Le signal est à peu près périodique avec $T \simeq 3{,}2$ ms d'où $\boxed{f \simeq 310\ \text{Hz}}$. Il s'agit sûrement de la corde du Mi aigu qui doit être accordée.

3. En BF, le condensateur équivaut à un interrupteur ouvert donc le circuit devient :



$$\boxed{u_s \xrightarrow{BF} 0}$$

En HF, le condensateur équivaut à un fil :



donc $\boxed{u_s \xrightarrow{HF} u_e}$

Il s'agit d'un filtre passe-haut.

4. Un diviseur de tension donne en notations $\mathbb{C}$:

$$\underline{u}_1 = \underline{u}_e \cdot \frac{R_1}{R_1 + \underline{Z}_{C_1}} = \underline{u}_e \frac{jR_1C_1\omega}{1 + jR_1C_1\omega} \quad : \quad \boxed{\underline{H}_1 = \frac{jR_1C_1\omega}{1 + jR_1C_1\omega}}$$

5. Forme canonique des filtres passe-haut du 1er ordre :

$$\underline{H}_{PH1} = \frac{j\,\omega/\omega_c}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} H_0 \quad \text{donc} \quad \boxed{\omega_c = \frac{1}{R_1C_1}} \quad \text{et} \quad \boxed{H_0 = 1}$$

(H)

$$\boxed{f_c = \frac{1}{2\pi} \times \frac{1}{R_1C_1} = 15{,}9\ \text{Hz}.}$$

6. En BF : $\underline{H} \xrightarrow{BF} jR_1C_1\omega$: $\boxed{G_{dB,BF} = 20 \log R_1C_1\omega}$ (pente de +20dB/dec)

En HF : $\underline{H} \xrightarrow{HF} 1$: $\boxed{G_{dB,HF} = 0\ \text{dB}}$

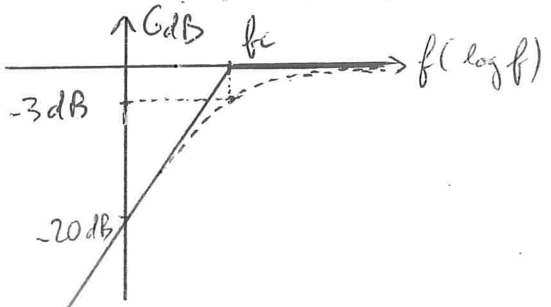
Intersection en I $\left| \begin{array}{l} \omega_I = 1/R_1C_1 = \omega_c \\ G_{dB}(I) = 0\ \text{dB} \end{array} \right.$

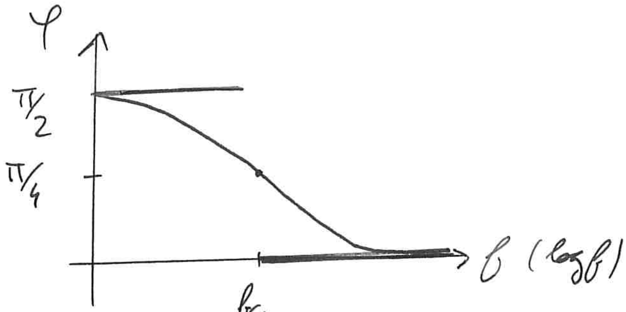
$$G_{dB} = 20 \log \frac{R_1C_1\omega}{\sqrt{1 + (R_1C_1\omega)^2}} \quad \text{donc} \quad \boxed{G_{dB}(\omega_c) = 20 \log \frac{1}{\sqrt{2}} = -3\ \text{dB}}$$

7. $\varphi = \arg(\underline{H}_1) = \frac{\pi}{2} - \arctan(R_1C_1\omega) \xrightarrow{BF} \frac{\pi}{2}$ rad.
$\xrightarrow{HF} 0$

et $\varphi(\omega_c) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ rad.

8.

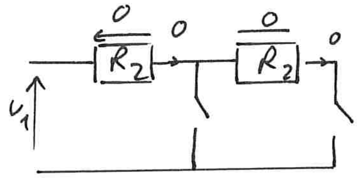




Le fondamental du signal est très supérieur à f_c : le signal variable est transmis sans déformation.

Par contre la composante continue est supprimée.

9 m̂ raisonnement : en BF

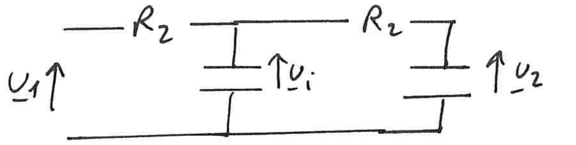


$\uparrow u_2 \xrightarrow{BF} u_1$

en HF : u_2 = tension aux bornes d'un fil : $u_2 \xrightarrow{HF} 0$.

Il s'agit bien d'un filtre passe-bas.

10. ⚠ 2 diviseurs de tension successifs (à faire ss erreur !)



$$\underline{u}_2 = \underline{u}_i \cdot \frac{\underline{Z}_{C_2}}{R_2 + \underline{Z}_{C_2}}$$

$$\underline{u}_i = \underline{u}_1 \cdot \frac{\underline{Z}_{éq}}{R_2 + \underline{Z}_{éq}} \quad \text{avec } \underline{Z}_{éq} = \underline{Z}_{C_2} // (R_2 + \underline{Z}_{C_2})$$

D'où
$$\underline{H}_2 = \frac{\underline{Z}_{C_2}}{R_2 + \underline{Z}_{C_2}} \times \frac{\underline{Z}_{C_2} \cdot (R_2 + \underline{Z}_{C_2}) / (R_2 + \underline{Z}_{C_2} + \underline{Z}_{C_2})}{R_2 + \underline{Z}_{C_2} \cdot (R_2 + \underline{Z}_{C_2}) / (R_2 + \underline{Z}_{C_2} + \underline{Z}_{C_2})} = \frac{\underline{Z}_{C_2}^2}{R_2(R_2 + 2\underline{Z}_{C_2}) + (R_2 + \underline{Z}_{C_2})\underline{Z}_{C_2}}$$

Finalement
$$\underline{H}_2 = \frac{\underline{Z}_{C_2}^2}{R_2^2 + 3R_2\underline{Z}_{C_2} + \underline{Z}_{C_2}^2} = \frac{1}{1 + 3\frac{R_2}{\underline{Z}_{C_2}} + \frac{R_2^2}{\underline{Z}_{C_2}^2}}$$

$$\boxed{\underline{H}_2 = \frac{1}{1 + 3jR_2C_2\omega - R_2^2C_2^2\omega^2}}$$

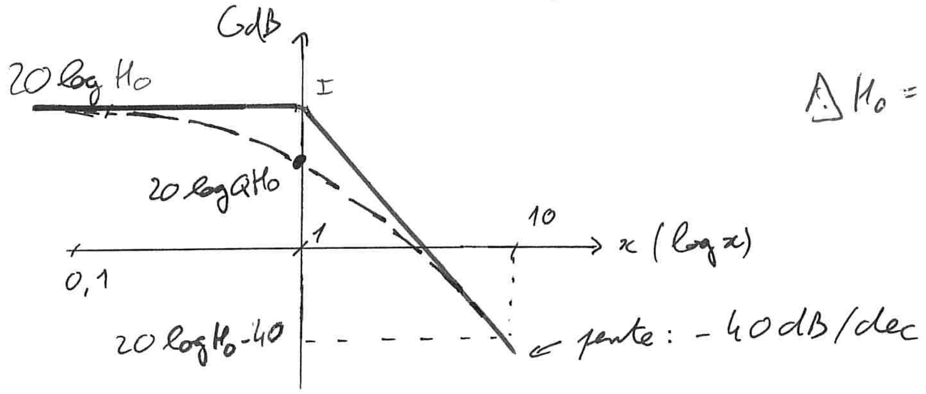
L'identification donne $\boxed{H_0 = 1 \,;\quad \omega_0 = 1/R_2C_2 \,;\quad Q = \frac{1}{3}}$

11. En BF : $\underline{H}_2 \xrightarrow{BF} H_0$: $\boxed{G_{dB,BF} = 20\log H_0}$

En HF : $\underline{H}_3 \xrightarrow{HF} -\dfrac{H_0\,\omega_0^2}{\omega^2}$: $G_{dB,HF} = 20\log\left(\dfrac{H_0\omega_0^2}{\omega^2}\right) = 20\log\left(H_0/x^2\right)$: pente $-40\,dB/dec$

Intersection en $\boxed{I : \begin{cases} x_I = 1 \quad (\omega_I = \omega_0) \\ G_{dB}(I) = 20\log H_0 \end{cases}}$

12. $G_{dB} = 20\log\dfrac{H_0}{\sqrt{(1-x^2) + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}}$ donc $\boxed{G_{dB}(x=1) = 20\log H_0 Q}$



⚠ $H_0 = 1$ donc $20\log H_0 = 0\,dB$

13. • On relève bien sur le diagramme fourni une pente de $\underline{\underline{-40\,dB/dec}}$

• Gain passant en BF $= G_{dB\,MAX} = 14\,dB$

• En ω_c on a $G_{dB} = G_{dB\,MAX} - 3\,dB = 11\,dB$: on lit $\boxed{f_c = 100\,Hz}$

14. Croisement des asymptotes en $I \begin{cases} f_0 \simeq 300\,Hz \\ G_{dB} = 20\log H_0 = 14\,dB \end{cases}$

Donc $\boxed{\begin{matrix} f_0 = 300\,Hz \\ \omega_0 = 1900\,rad.s^{-1} \end{matrix}}$ et $\boxed{H_0 = 10^{14/20} = 5}$

Le gain réel en f_0 est $G_{dB}(f_0) \simeq 5\,dB = 20\log H_0 Q$

D'où $H_0 Q = 10^{5/20} = 1,8$ et $\boxed{Q = \dfrac{1,8}{H_0} = 0,35}$.