

## DEVOIR SURVEILLE N°4 PHYSIQUE

### I. Filtrage de tensions non sinusoïdales

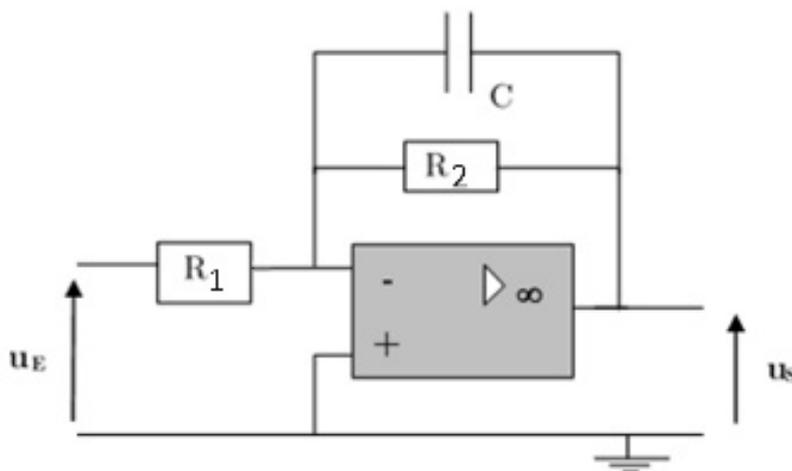
Nous allons étudier trois filtres actifs et leurs actions sur diverses tensions périodiques.

Les amplificateurs intégrés linéaires (ALI) utilisés sont supposés idéaux et fonctionnent en mode linéaire.

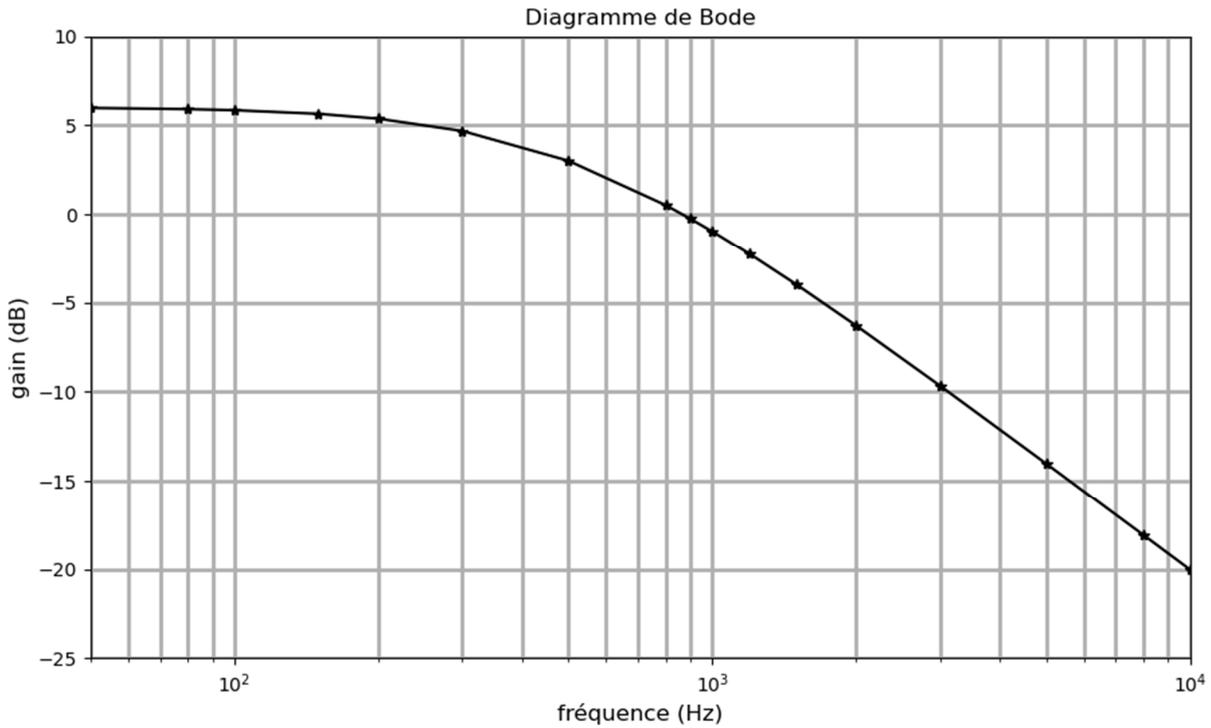
1. Rappeler les caractéristiques d'un ALI idéal [avec un schéma bien sûr !] et la conséquence de son fonctionnement en régime linéaire.
2. L'ALI est un composant actif : décrire en quelques mots sa source d'énergie.

#### A. Analyse du premier filtre

Voici le schéma électrique du premier filtre étudié :



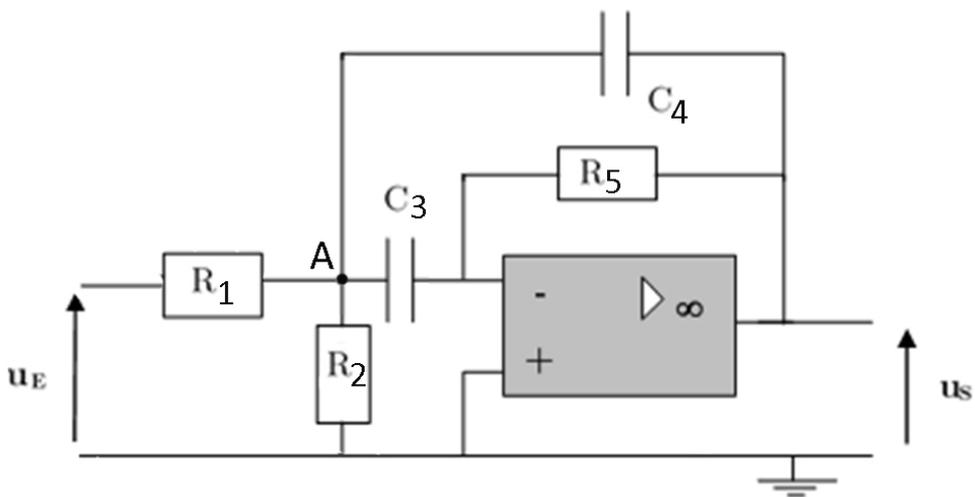
3. Etablir la fonction de transfert  $H_1$  du filtre n°1 et déduire, à l'aide de la forme canonique, la nature du filtre n°1. Donner l'expression de sa pulsation de coupure  $\omega_c$  et de son gain passant  $H_0$ .
4. Déterminer les équations des asymptotes du gain en dB en basses puis en hautes fréquences ainsi que les coordonnées de leur point I d'intersection.
5. En déduire l'allure du diagramme asymptotique de Bode du gain et compléter avec le gain réel en  $\omega_c$ .
6. Déterminer l'impédance d'entrée  $Z_{e1}$  du filtre n°1.
7. L'ajout d'une impédance de charge  $Z_{ch}$  modifie-t-elle la fonction de transfert du filtre ? En s'appuyant sur le modèle électrique équivalent à tout quadripôle [avec  $Z_e$ ,  $Z_s$  et  $H_{vide}$ ], expliquer pourquoi il est possible d'en déduire que l'impédance de sortie de ce filtre est nulle.
8. Voici le diagramme de Bode expérimental du gain du filtre n°1. Déterminer par lecture graphique la valeur de  $H_0$  et de sa fréquence de coupure  $f_c = \omega_c/2\pi$ .



9. On donne  $C = 470 \text{ nF}$ . En déduire les valeurs numériques des résistances  $R_1$  et  $R_2$ .

**B. Analyse du deuxième filtre**

Voici le schéma électrique du deuxième filtre étudié :



10. Montrer que la fonction de transfert  $\underline{H}_2$  de ce filtre peut s'écrire à l'aide des admittances :

$$\underline{H}_2 = - \frac{Y_1 Y_3}{Y_3 Y_4 + Y_5 (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)}$$

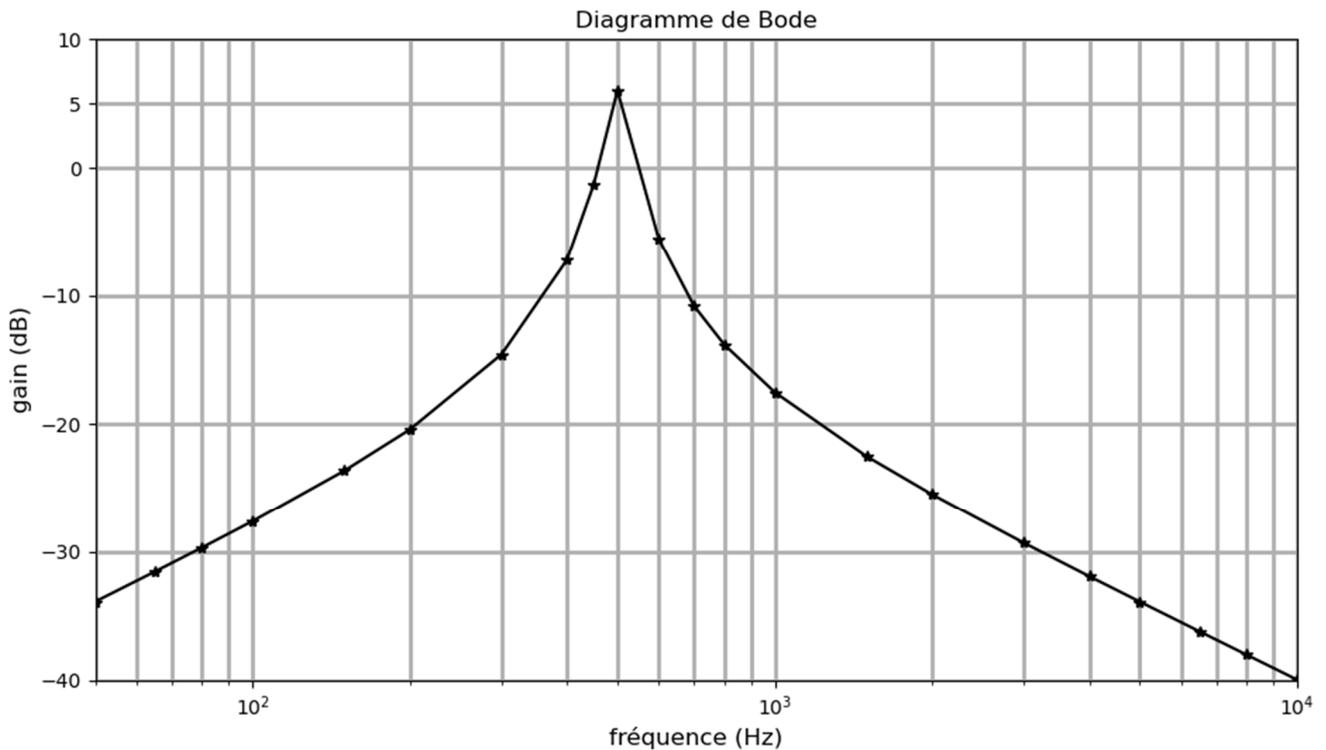
Pour la suite  $C_3 = C_4 = C$ ,  $R_1 = R_2 = R$  et  $R_5 = 10 R$ .

11. Mettre  $\underline{H}_2$  sous la forme canonique suivante en exprimant  $H'_0$ ,  $Q$  et  $\omega_0$  :

$$\underline{H}_2 = \frac{H'_0}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

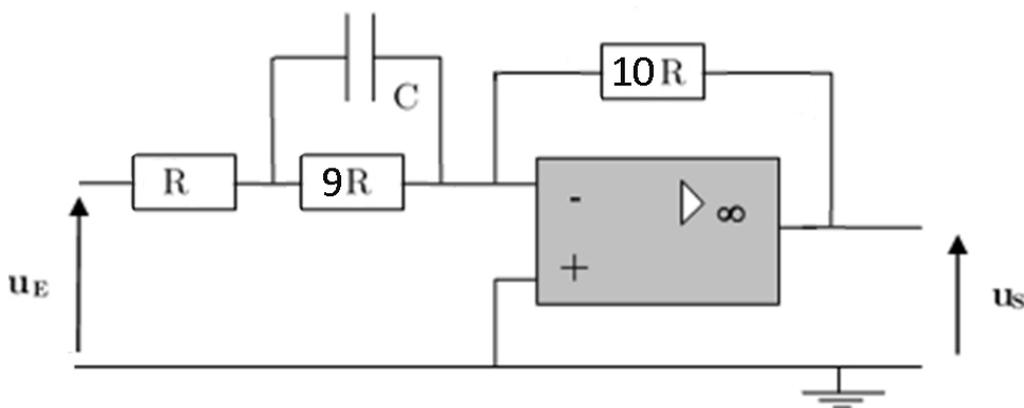
- 12. En utilisant la forme canonique précédente, déterminer l'équation des asymptotes du gain en dB en basses puis en hautes fréquences ainsi que les coordonnées de leur point I d'intersection.
- 13. Déterminer l'expression du gain en dB et sa valeur exacte lorsque  $\omega = \omega_0$ .
- 14. Voici le diagramme de Bode expérimental du gain du filtre n°2. Déterminer par lecture graphique la valeur de  $H'_0$ ,  $Q$  et de sa fréquence propre  $f_0 = \omega_0/2\pi$ . Attention pour le filtre réel les relations  $C_3 = C_4 = C$ ,  $R_1 = R_2 = R$  et  $R_5 = 10 R$  ne sont pas vérifiées et la valeurs de  $H'_0$  et  $Q$  sont donc différentes de celles de la question 11.

On conservera les valeurs **expérimentales** (celles de la question 13) pour la suite.



### C. Analyse du troisième filtre

Voici le schéma électrique du troisième filtre étudié :



15. Etablir la fonction de transfert  $\underline{H}_3$  du filtre n°3 et le mettre sous la forme canonique suivante en exprimant  $\omega_{c1}$  et  $\omega_{c2}$  :

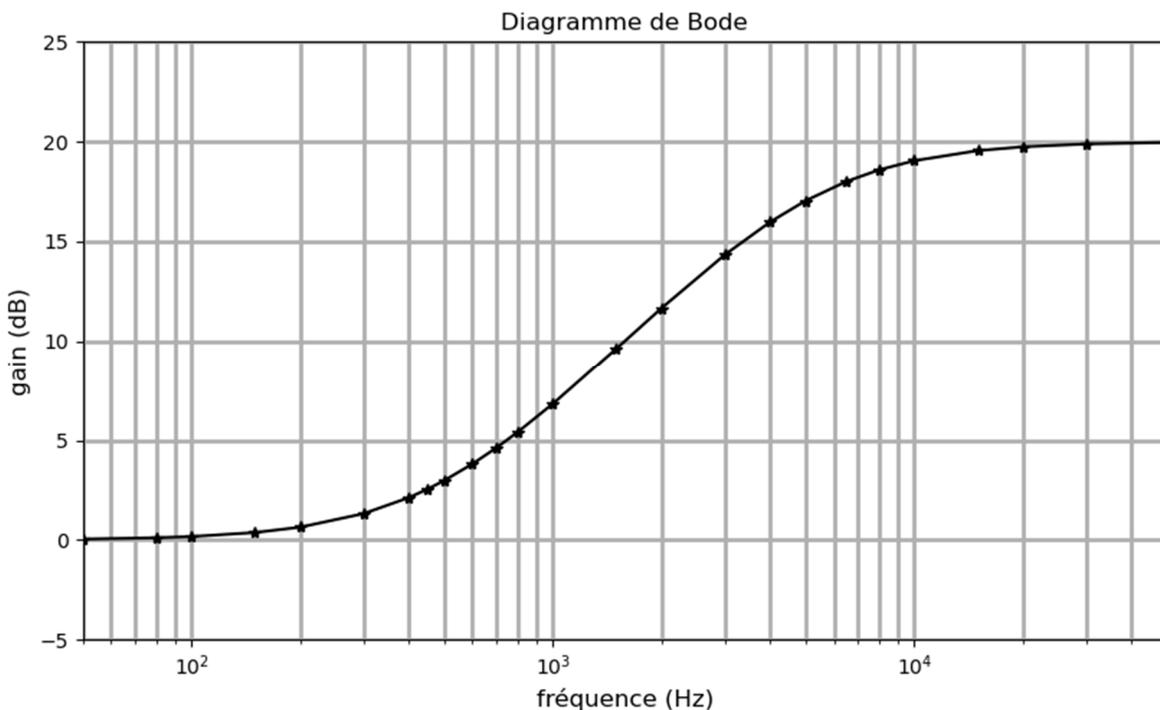
$$\underline{H}_3 = - \frac{1 + j \frac{\omega}{\omega_{c1}}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_{c2}}}$$

16. La fonction de transfert  $\underline{H}_3$  est le produit de deux fonctions de transfert simples :

$$\underline{H}_4 = 1 + j \frac{\omega}{\omega_{c1}} \quad \text{et} \quad \underline{H}_5 = \frac{-1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_{c2}}}$$

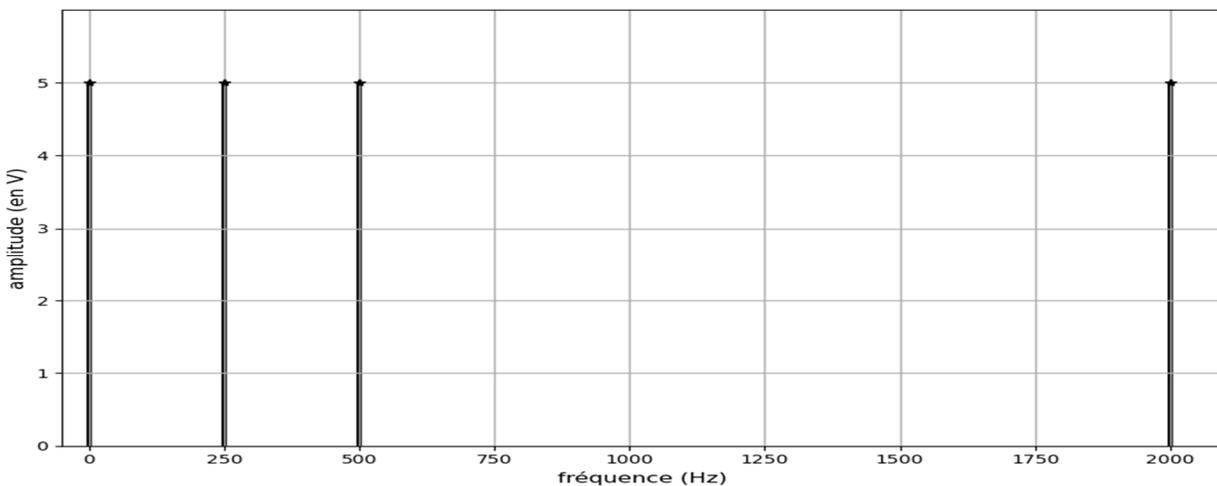
En exploitant cela, construire le diagramme de Bode asymptotique du gain du filtre n°3. On rédigera clairement la réponse ! Rajouter le gain réel en  $\omega_{c1}$  et  $\omega_{c2}$ .

~~17. Voici le diagramme expérimental de Bode du gain du filtre n°3. Déterminer par lecture graphique la valeur des fréquences  $f_{c1} = \omega_{c1}/2\pi$  et  $f_{c2} = \omega_{c2}/2\pi$ . [Q à supprimer]~~



**D. Utilisation des trois filtres avec des tensions périodiques**

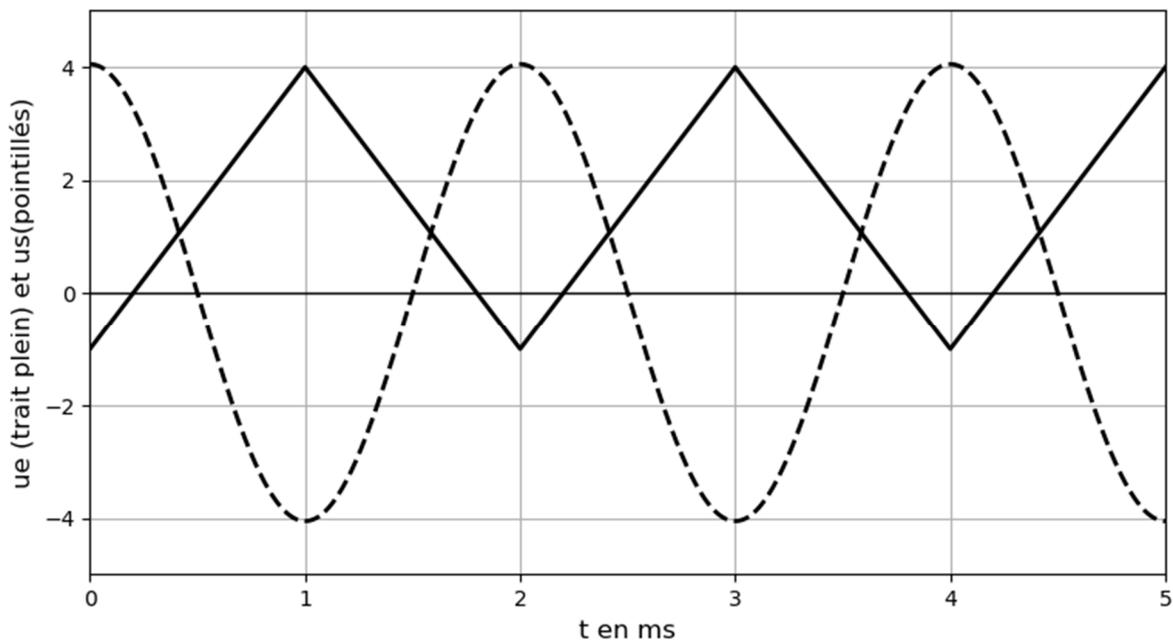
Voici le spectre d'une tension périodique non sinusoïdale :



18. Quelle est la valeur efficace  $U_{e,eff}$  et la valeur moyenne  $U_0$  de cette tension ?
19. Déterminer le spectre de sortie  $u_{s1}$  lorsque cette tension est appliquée à l'entrée du filtre n°1. Calculer précisément les amplitudes de chaque composante de  $u_{s1}$  en utilisant les valeurs déterminées à la question 8.
20. Même question si cette tension est envoyée à l'entrée du filtre n°2.
- ~~21. Même question avec le filtre n°3. [Q à supprimer]~~

On applique maintenant une tension triangulaire  $u_e$  à l'entrée de l'un des filtres précédents et on observe la tension  $u_s$  à la sortie.

Voici l'enregistrement à l'oscilloscope de  $u_e$  en trait plein et de  $u_s$  en pointillés.

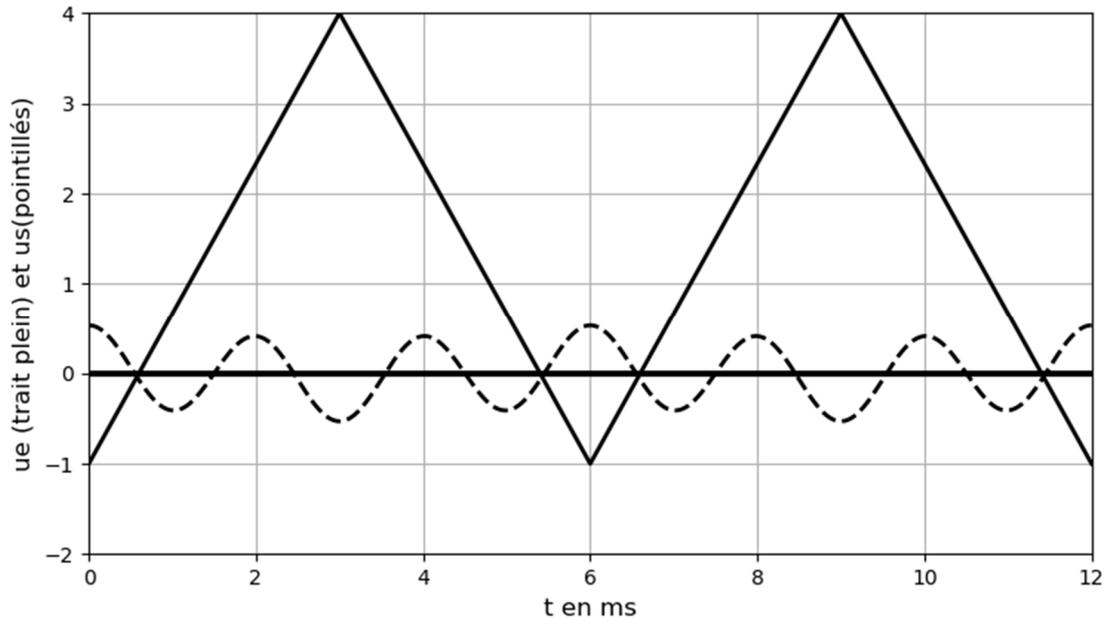


Le développement de Fourier de la tension triangulaire  $u_e$  est le suivant :

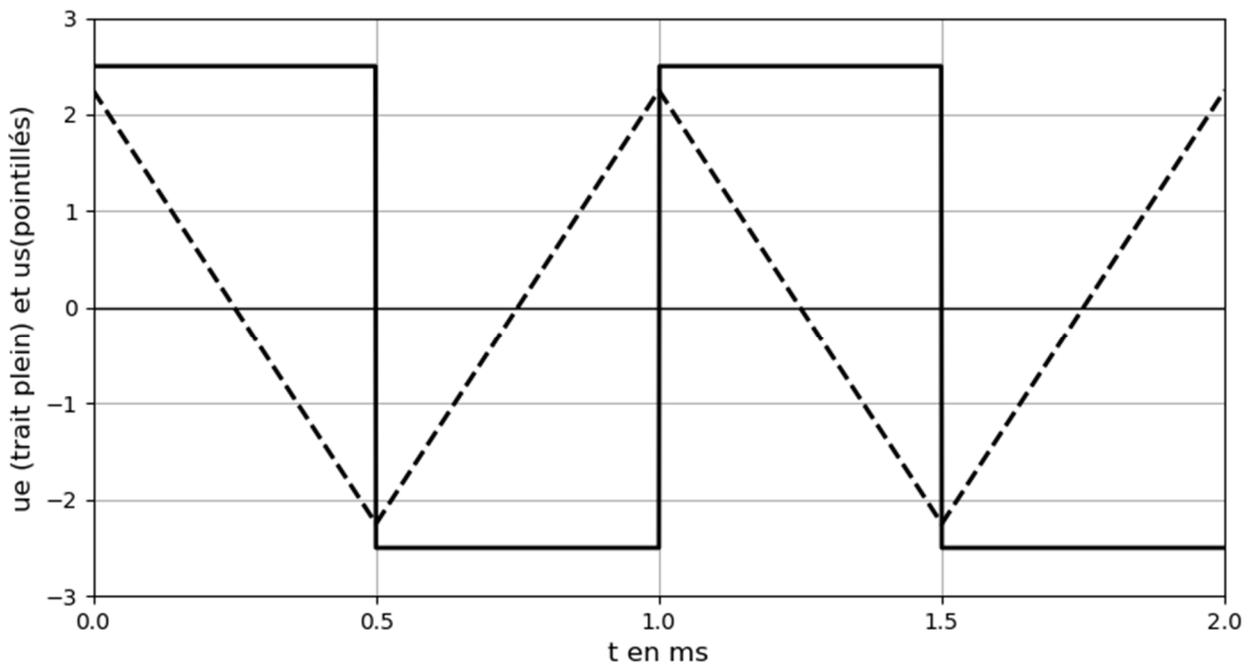
$$u_e(t) = \langle u_e \rangle + \frac{8 u_{em}}{\pi^2} \left( \cos(\omega t) + \frac{1}{3^2} \cos(3\omega t) + \frac{1}{5^2} \cos(5\omega t) + \dots \right)$$

22. Pour observer des courbes qui ne défilent pas à l'écran il faut **synchroniser** l'oscilloscope sur une des deux tensions (voie 1 ou voie 2). Expliquer en quelques lignes ce qu'est la synchronisation.
23. Par lecture graphique donner la fréquence  $f_e$  de la tension d'entrée ainsi que sa valeur moyenne  $\langle u_e \rangle$  et son amplitude  $u_{em}$ .
24. Déterminer de même, la fréquence  $f_s$ , la valeur moyenne  $\langle u_s \rangle$  et l'amplitude  $u_{sm}$  de la tension de sortie.
25. En expliquant clairement le raisonnement, indiquer quel est le filtre utilisé parmi les trois filtres étudiés précédemment.

26. Même question pour l'enregistrement suivant des tensions  $u_e$  (en trait plein) et  $u_s$  (en pointillés) suivants :



27. Même question pour l'enregistrement suivant des tensions  $u_e$  (en trait plein) et  $u_s$  (en pointillés) suivants :



## II. Trajectoires des plombs d'une cartouche (d'après CCP MP 2017) :

Un fusil de chasse permet d'envoyer à distance des projectiles au moyen de gaz produits par la combustion rapide et confinée d'un composé chimique. La déflagration va éjecter de la bouche du fusil les sphères de plomb qui étaient dans la cartouche avec une vitesse qui, en moyenne, vaut  $v_0 = 380 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , valeur à utiliser dans toutes les applications numériques ultérieures.

Les données suivantes sont fournies par un fabricant de cartouches de fusil de chasse :

### Document

La photographie ci-contre est celle d'une cartouche en partie dénudée. La vitesse de vol des billes de plomb (appelées grenaille) dépend en premier lieu de leur taille. Avec une même vitesse de départ on obtient des différences considérables puisque, en raison de leur masse moins importante, les plombs de petit diamètre perdent plus de vitesse pour une même distance parcourue, face à la résistance de l'air à laquelle ils sont confrontés. La **distance de sécurité** de la grenaille de plomb, c'est-à-dire la distance au-delà de laquelle il n'y a plus danger pour les tiers, peut être déterminée à partir de la règle grossière suivante :

**diamètre des plombs en mm  $\times$  100 = zone dangereuse en m.**

Exemple : pour des plombs de diamètre 2 mm :  $2 \times 100 = 200 \text{ m}$ .

Il s'agit de la distance maximale possible avec l'angle de tir le plus favorable, à ne pas confondre avec la **portée utile**, qui est beaucoup plus faible.

Selon la taille des grains, la portée utile est de 35 à 40 m tout au plus. Au-delà, la dispersion est trop grande de sorte qu'il n'y a plus de couverture suffisante. Par contre, en cas d'agglutination, les billes agglutinées constituent des projectiles d'un poids supérieur qui peuvent être dangereux à des distances beaucoup plus grandes.

La puissance de pénétration et la létalité des plombs diminuent avec l'augmentation de la distance de tir et ce, d'autant plus rapidement que les plombs sont plus petits.

Nous allons vérifier ces affirmations.

### Données :

La taille des plombs est identifiée par un numéro allant de 1 à 12 qui correspond à des rayons décroissant de 0,125 mm par numéro :  $r_1 = 2 \text{ mm}$  et  $r_{12} = 0,625 \text{ mm}$ . Les masses correspondantes sont  $m_1 = 0,38 \text{ g}$  et  $m_{12} = 0,012 \text{ g}$ .

On suppose l'accélération de la pesanteur égale à  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

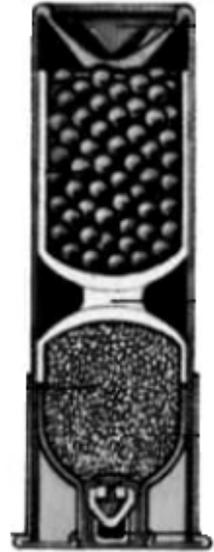
La masse volumique de l'air est :  $\rho_{\text{air}} = 1,23 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

Nous considérons la trajectoire d'un plomb de cartouche en négligeant la poussée d'Archimède.

### Équation du mouvement

Le projectile est a priori soumis à deux forces : son poids et la force de frottement fluide exercée par l'air qui, dans les cas considérés, est constituée de la traînée aérodynamique qui s'écrit :

$$\vec{F}_D = -\frac{1}{2} \rho_{\text{air}} S C_D v \vec{v}$$



où  $v$  est la norme du vecteur vitesse  $\vec{v}$  du projectile,  $\rho_{air}$  est la masse volumique de l'air,  $S = \pi R^2$  est la section de l'objet exposée au fluide dans la direction de l'écoulement et  $C_D$  est un coefficient sans dimension appelé « coefficient de traînée ». Pour les vitesses typiques étudiées (vitesses supersoniques situées entre 375 et 420  $m \cdot s^{-1}$ ) et pour les formes quasi-sphériques de projectiles,  $C_D$  est de l'ordre de 0,44.

1. Établir l'équation différentielle vectorielle sur la vitesse du barycentre du plomb de masse  $m$  dans le référentiel terrestre.

On confondra, par la suite, le plomb avec une masse ponctuelle.

### A. Premier modèle : trajectoire gravitaire

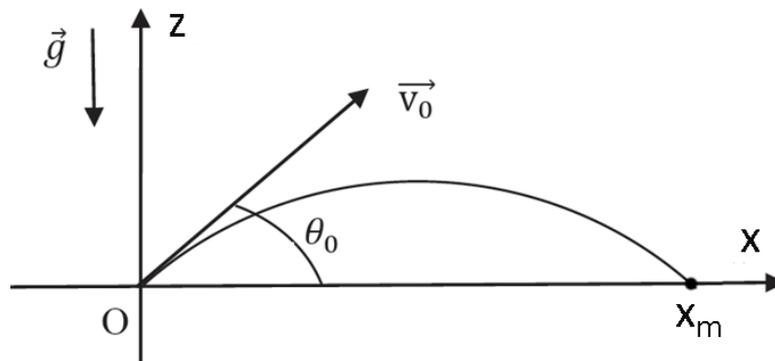
On considère le cas où la vitesse initiale du projectile est suffisamment faible pour que l'on puisse négliger la force de frottement fluide de l'air.

2. Montrer que cela correspondrait à une vitesse initiale  $v_0$ , obéissant à l'inégalité :

$$v_0 \ll \sqrt{\frac{2mg}{\rho_{air}\pi R^2 C_D}}$$

Par la suite on notera  $v_\infty = \sqrt{\frac{2mg}{\rho_{air}\pi R^2 C_D}}$

On introduit la base cartésienne (figure ci-dessous). On note  $\theta$  l'angle de la vitesse  $\vec{v}$  avec le plan horizontal et  $\theta_0$  sa valeur à l'instant initial.



3. Établir l'équation explicite  $z(x)$  de la trajectoire du plomb.

4. Déterminer la portée  $x_m$  du tir, c'est-à-dire la distance atteinte par le projectile.

5. Déterminer la hauteur maximale  $H_m$  atteinte par le projectile.

6. Calculer la valeur  $\theta_{opt}$  de l'angle  $\theta_0$  pour laquelle la portée est maximale et calculer cette portée maximale.

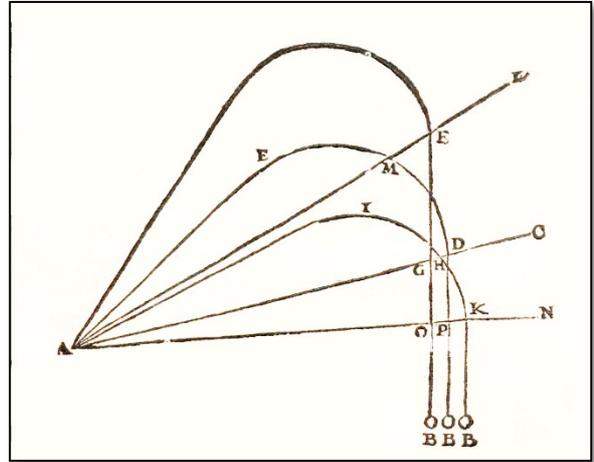
7. Application numérique : calculer la portée  $x_m$ , la hauteur maximale  $h_m$  et la vitesse  $v_\infty$  pour un plomb n°1 lancé selon  $\theta_0 = 45^\circ$  avec  $v_0 = 380 m \cdot s^{-1}$ . Conclusion sur ce modèle ?

### B. Deuxième modèle : trajectoire de Tartaglia

Dans ce deuxième modèle, la trajectoire diffère considérablement de la trajectoire précédente. On distingue 3 phases :

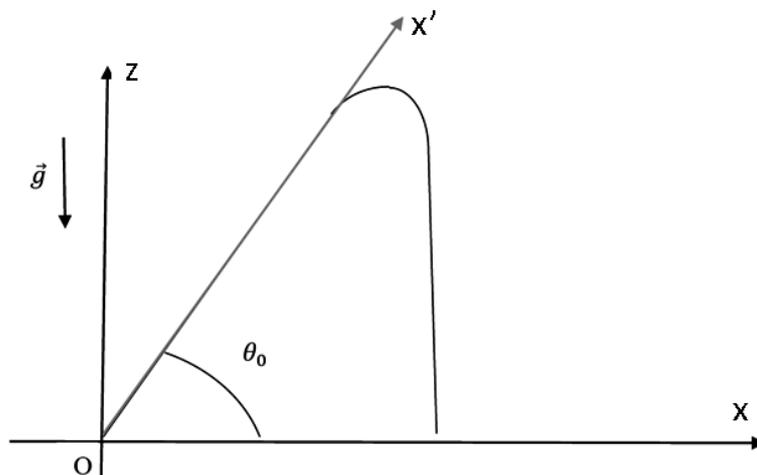
- une première phase à mouvement rectiligne,
- une 2<sup>ème</sup> phase à trajectoire asymétrique autour du sommet,
- une 3<sup>ème</sup> phase de mouvement de chute verticale.

Il s'agit d'une « trajectoire de Tartaglia », du nom du mathématicien balisticien Niccolò Tartaglia (XVI<sup>e</sup> siècle), qui a décrit les trajectoires d'un boulet de canon.



**Phase initiale : mouvement rectiligne ascendant**

Soit  $Ox'$  la direction de la trajectoire rectiligne dans cette phase initiale. On note  $x'$  l'abscisse du point  $M$  sur cette droite qui fait un angle  $\theta_0$  avec  $Ox$  et  $\vec{v}$  sa vitesse (figure ci-dessous).



~~8. Montrer que le poids d'un plomb est alors négligeable devant la force de traînée. [Q à supprimer et à remplacer par une affirmation : dans cette portion le poids est négligeable...]~~

9. Montrer que l'équation du mouvement dans la première phase se met sous la forme :

$$\frac{dv}{dx'} = -\frac{g}{v_\infty^2} v$$

où  $v = dx'/dt$ . On pose :  $D = v_\infty^2/g$ .

10. Établir l'expression de  $v$  en fonction de  $x'$ . Que représente le paramètre  $D$  ?

**11.** On considère que cette phase se termine dès que  $v = 10 v_\infty$  et on note  $d$  la distance que doit parcourir le plomb pour atteindre la vitesse  $10 v_\infty$ . Déterminer l'expression de  $d$ . Calculer  $D$  puis  $d$  pour un plomb n°1 et pour un plomb n°12 [attention :  $v_\infty$  dépend de  $m$  et  $r$ ].

**12.** Quelle est l'énergie cinétique  $E_C = \frac{1}{2} m v^2$  des plombs n°1 et des plombs n°12 lorsque  $x' = d$  ? En déduire le danger lié à l'agglutination de la grenaille.

**Troisième et dernière phase : mouvement rectiligne descendant**

Dans cette phase on ne néglige plus de force mais on suppose que le plomb a atteint une vitesse limite constante  $\vec{v}_{lim}$ .

**13.** Déterminer l'expression de  $\vec{v}_{lim}$ .

**14.** Expliquer le terme de « mur aérodynamique » utilisé pour qualifier cette dernière phase.

**Deuxième phase : la phase intermédiaire**

On peut établir par un calcul formel, à partir de l'équation du mouvement, l'expression approchée de la portée maximale du projectile pour ce type de trajectoire :

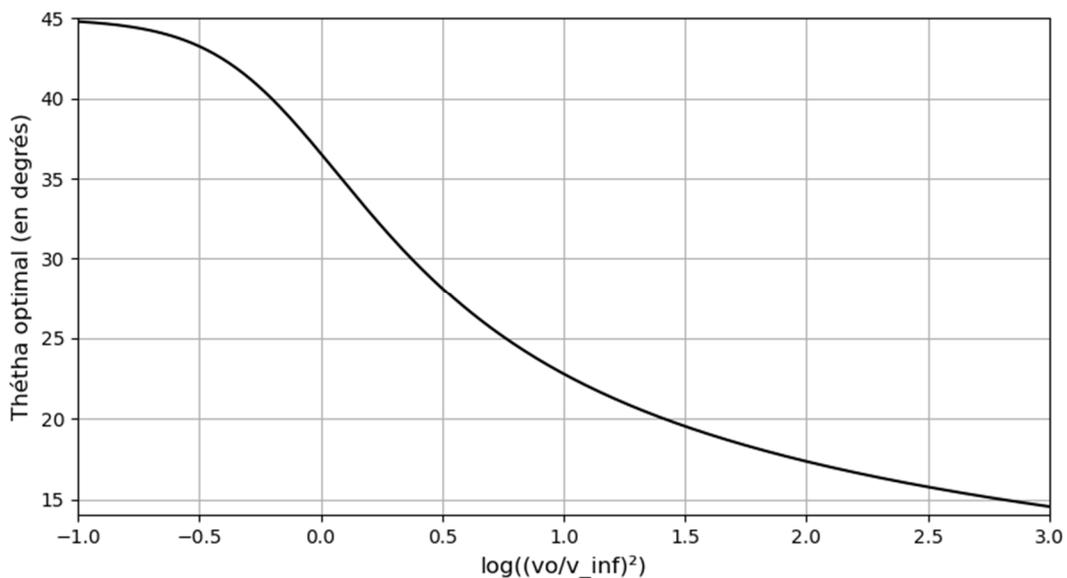
$$x_m \approx \frac{D \cos(\theta_0)}{2} \ln \left( 1 + 4 \left( \frac{v_0}{v_\infty} \right)^2 \sin^2(\theta_0) \right)$$

**15.** Évaluer numériquement les portées maximales des plombs n°1 et n°12, pour  $\theta_0 = 16^\circ$ . Comparer aux valeurs données dans le document 1 (attention à la différence entre rayon et diamètre).

Le même calcul donne également l'expression approchée de l'angle initial permettant d'optimiser la portée maximale  $x_m$  :

$$\theta_{opt} \approx \arctan \left( \sqrt{\frac{2\sqrt{2} \left( \frac{v_0}{v_\infty} \right)^2}{\left( 1 + 2\sqrt{2} \left( \frac{v_0}{v_\infty} \right)^2 \right) \ln \left( 1 + 2\sqrt{2} \left( \frac{v_0}{v_\infty} \right)^2 \right)}} \right)$$

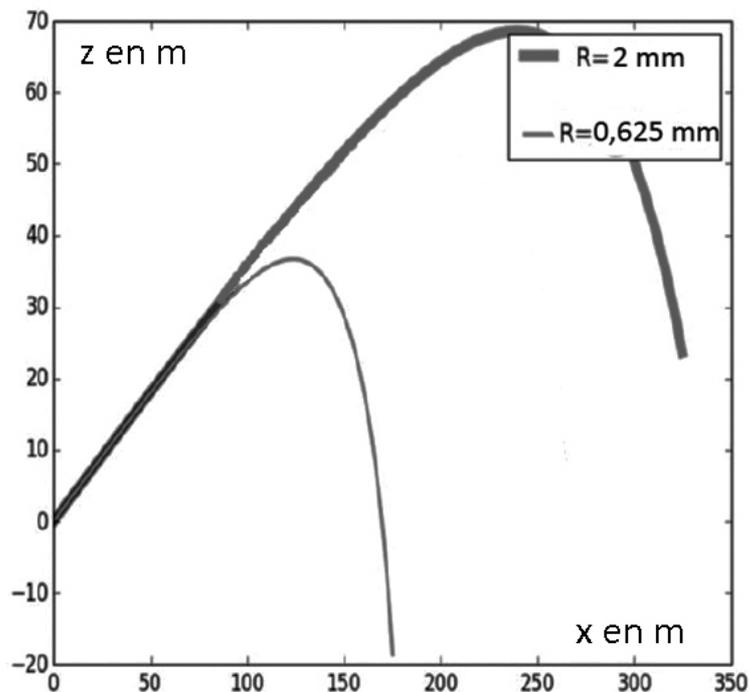
**16.** La figure ci-dessous donne la courbe  $\theta_{opt}$  (en degrés) fonction de  $\log((v_0/v_\infty)^2)$ . Identifier la valeur de  $\theta_{opt}$  pour les plombs n°1 et n°12.



### C. Troisième approche : résolution numérique

Pour calculer plus précisément la portée utile du tir de grenaille de plomb, on intègre numériquement l'équation du mouvement.

La figure ci-dessous donne les trajectoires des plombs n° 1 et 12 de vitesse initiale  $380 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ , pour l'angle  $\theta_0$  optimisant la portée maximale. Les valeurs des coordonnées sont en mètres.



17. Évaluer les portées maximales pour chaque calibre et comparer aux données du document 1.



### III. Problème ouvert : Ping-pong bounce challenge – game of 7

Pendant la pause, au lieu de sortir respirer l'air pur dans la cour, les élèves de PCSI 1 préfèrent jouer à une variante non officielle du ping-pong...

Il faut lancer la balle afin qu'elle fasse un nombre croissant de rebonds avant de tomber de la table : 1 rebond à la première tentative, 2 rebonds à la seconde, ...

On propose de modéliser le jeu en négligeant les frottements (la version avec frottement fera l'objet d'un prochain DS).

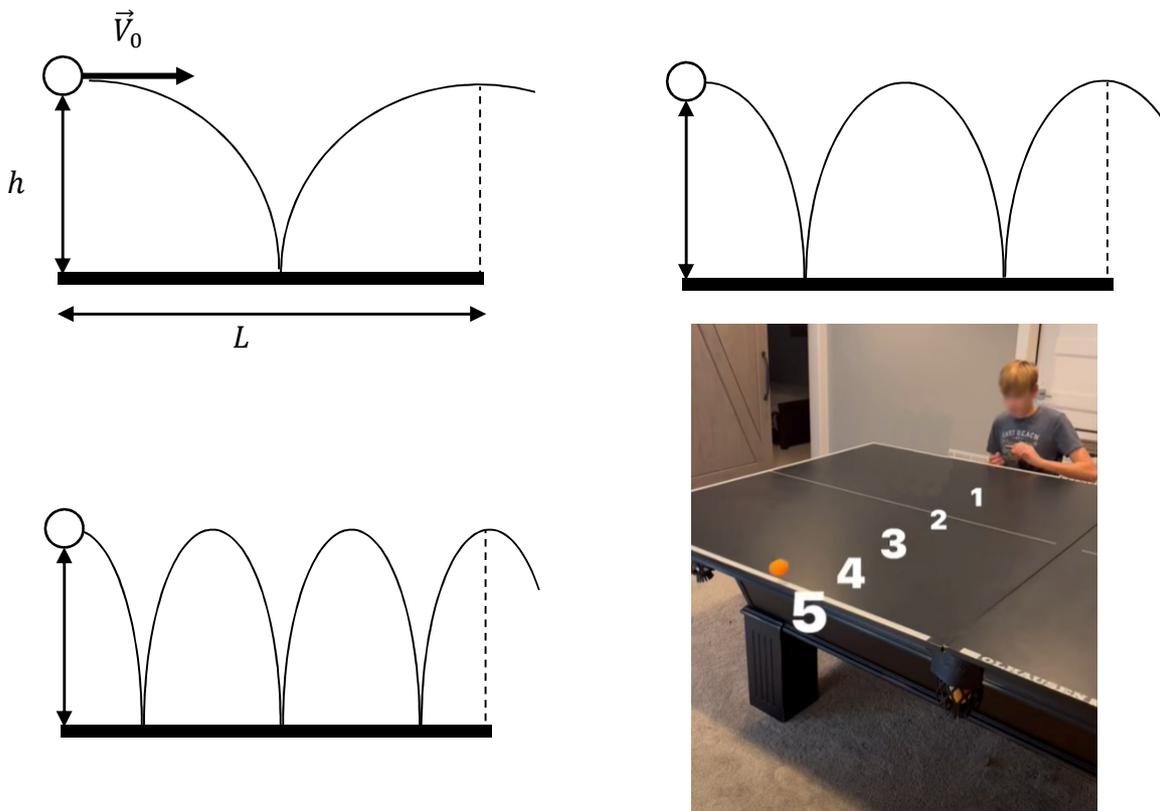
Dans ces conditions les rebonds se font avec conservation de l'énergie cinétique :

- la composante horizontale de la vitesse est conservée,
- la composante verticale change simplement de signe.

La balle est lancée d'une hauteur  $h$  avec une vitesse  $V_0$  horizontale.

Afin de diminuer l'influence des incertitudes sur  $h$  et  $V_0$ , on propose le schéma suivant pour l'allure des trajectoires :

- la balle est lancée à la verticale du bord de la table,
- la balle arrive à l'autre extrémité de la table au sommet de sa trajectoire.



1. La table ayant une longueur  $L$ , établir la relation entre la masse  $m$  de la balle, l'accélération  $g$  de la pesanteur, le nombre  $n$  de rebonds souhaités, la hauteur  $h$  et la vitesse  $V_0$  de lancement. [d'autres modélisations de la trajectoires sont possibles : ne pas hésiter à présenter un autre modèle].
2. Pensez-vous que ce jeu mériterait de figurer aux JO 2024 ?
3. Quel serait alors le représentant de la PCSI 1 [je vous ai promis le niveau des JO en fin de deuxième année mais certains ont peut-être un peu d'avance !] ?