

## DEVOIR SURVEILLE N°5

### PHYSIQUE

#### I. Quelques descentes à ski :

Les PCSI1 n'ont pas tous les mêmes techniques de ski...

On va supposer que toutes les trajectoires des élèves sont rectilignes dans le sens de la pente.

On prendra  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

Rappeler le modèle des frottements solides car certains partent avec  $-\lambda v$  ...



#### A. Descente prudente de Molka

Molka descend prudemment en chasse neige la longue piste verte « l'estive ».

On modélise la piste par un plan incliné faisant un angle  $\theta_1 = 8^\circ$  et la trajectoire de Molka par une droite.

Les frottements de l'air sont négligés et les frottements entre les skis et la neige sont modélisés par un frottement solide qui suit le modèle de Coulomb avec un coefficient de frottement  $\lambda_1$ .

1. Etablir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse  $v$  de Molka le long de la pente.
2. Résoudre cette équation sachant qu'initialement  $v(0) = 0$ .
3. Sachant que Molka peut modifier la valeur de  $\lambda_1$  en jouant sur la position plus ou moins écartée de ses skis, expliquer comment se fait la prise de vitesse, puis le maintien d'une vitesse raisonnable et enfin le ralentissement et l'arrêt.

#### B. Descentes courageuses de Carla et Clément

Carla et Clément sont plus aventureux que Molka et ils se sont élancés, sous les encouragements d'Emma et Virgile, dans la piste bleue « des marmottes ».

4. Que faut-il faire quand on voit le panneau suivant sur une piste ?



Carla et Clément ont préféré suivre les conseils de leur prof de physique et ont entamé un schuss...

Durant cette phase les frottements de l'air seront modélisés par un frottement fluide proportionnel à la vitesse :  $\vec{F}_2 = -\alpha_2 \vec{v}$ .

La piste est modélisée par un plan incliné d'angle  $\theta_2 = 12^\circ$  avec l'horizontale et les frottements entre la neige et les skis sont modélisés par un frottement solide qui suit le modèle de Coulomb avec un coefficient de frottement  $\lambda_2$  avec  $\lambda_2 = 0,10$ .

5. Sachant que la vitesse limite atteinte par Carla et Clément vers le bas de la piste est  $v_{lim} = 35 \text{ km.h}^{-1}$ , déterminer la valeur du coefficient  $\alpha_2$ . Faire l'A.N. avec  $m_{Carla} = 50 \text{ kg}$  et  $m_{Clément} = 70 \text{ kg}$  en précisant bien l'unité de  $\alpha_2$ .

6. A une telle vitesse, sans maîtrise parfaite des skis, la chute est inévitable. Les frottements de l'air deviennent alors rapidement négligeables mais les frottements solides avec la neige augmentent fortement :  $\lambda'_2 = 0,80$ . Déterminer dans de telles conditions la distance d'arrêt de Carla et Clément après leur chute en supposant que leur trajectoire reste rectiligne.

7. Quelle est le travail  $W_{frot}$  fourni par les frottements durant la phase d'arrêt ? Faire l'A.N. pour Carla et Clément.

**C. Descente folle de Roman**

Roman, skieur émérite, s'est également lancé dans le schuss mais sur une portion plus pentue de la piste ( $\theta_3 = 30^\circ$ ) avec une position plus aérodynamique : la vitesse finale qu'il atteint est  $v_{lim,3} = 110 \text{ km.h}^{-1}$ .



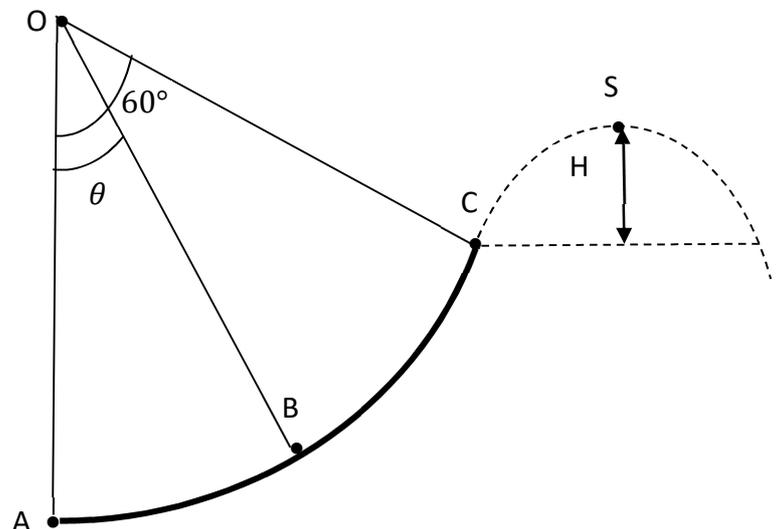
Lorsqu'il descend à une telle vitesse, les frottements entre les skis et la neige deviennent négligeables par rapport aux frottements fluides qui sont de la forme  $\vec{F}_3 = -\beta v^2 \vec{e}_v$  où  $\vec{e}_v$  est le vecteur unitaire colinéaire et de même sens que la vitesse  $\vec{v}$ .

8. Déterminer la valeur de  $\beta$ . Faire l'A.N. [avec unité !] avec  $m_{Roman} = 70 \text{ kg}$ .

9. Déterminer l'énergie cinétique de Roman lors d'une telle descente. Quel est l'élève de PCSI1 qui est le plus mature ? et le moins mature ?

**D. Saut de Bourriquet**

Un peu plus loin dans la station, Bourriquet, qui n'en est pas à sa première sortie au ski, fait un petit saut après avoir pris un peu d'élan sur un tremplin [merci Maxime !] :



Bourriquet est assimilée à un objet ponctuel B de masse  $m_B = 50 \text{ kg}$  qui glisse sans frottement sur le tremplin en forme d'arc de cercle de centre O et de rayon  $R = 6,0 \text{ m}$ . Le tremplin se termine au point C repéré par l'angle  $(\vec{OA}, \vec{OC}) = 60^\circ$ .

Le mouvement de Bourriquet sur le tremplin est repéré par l'angle  $\theta = (\vec{OA}, \vec{OB})$ .

A l'instant initial, Bourriquet est au point A ( $\theta_0 = 0$ ) avec une vitesse horizontale  $\vec{v}_0$ .

Au-delà du point C, Bourriquet n'est soumis qu'à son poids et le point S correspond à la hauteur  $H$  maximale atteinte au cours du saut par rapport au sommet du tremplin.

10. Déterminer la vitesse de Bourriquet sur le tremplin en fonction de l'angle  $\theta$ .
11. Donner l'expression de la réaction normale  $\vec{R}_N$  du tremplin en fonction de  $\theta$ .
12. Quelle vitesse minimale  $v_{0,\min}$  doit avoir Bourriquet pour passer le point C ? Faire l'A.N.
13. Dans le cas  $v_0 > v_{0,\lim}$  quelle est la hauteur maximale atteinte  $H$  ? Faire l'A.N. avec  $v_0 = 10 \text{ m.s}^{-1}$ .
14. Quel est le repas préféré de Bourriquet après une bonne journée de ski ? [il y a un indice sur la photo !].

Donner l'angle de départ en C :  $60^\circ$  et  $V_0 \neq V_c$

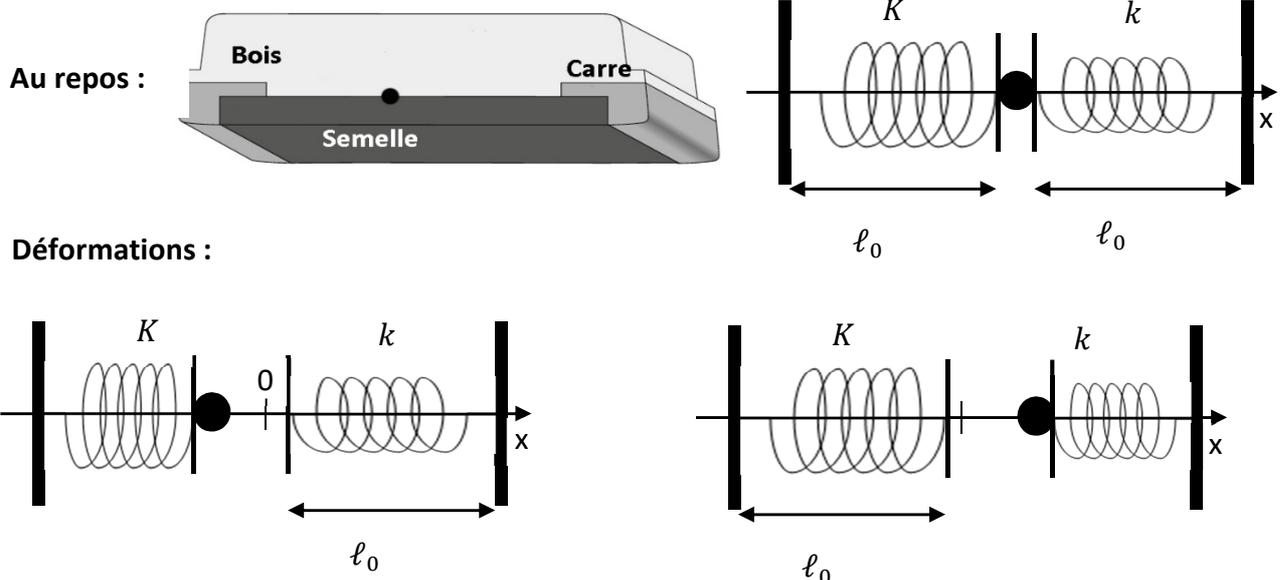
### E. Chute et skis cassés

La physique pour étudier la structure d'un ski est difficile avec les outils vus en première année PCSI.

Nous allons donc modéliser les deux couches (semelle et bois) qui forment sa structure par l'existence de deux ressorts différents de constantes de raideur  $K$  et  $k$  (cf. schéma ci-dessous).

Cette modélisation est un peu loin de la réalité mais nous l'accepterons pour cet exercice.

Lorsque le ski est au repos le point central est positionné en  $x = 0$  et les deux ressorts n'exercent aucune force. Lorsque le ski se déforme, l'une des couches reste immobile alors que l'autre se comprime et le ressort exerce alors une force de rappel vers la position d'équilibre.



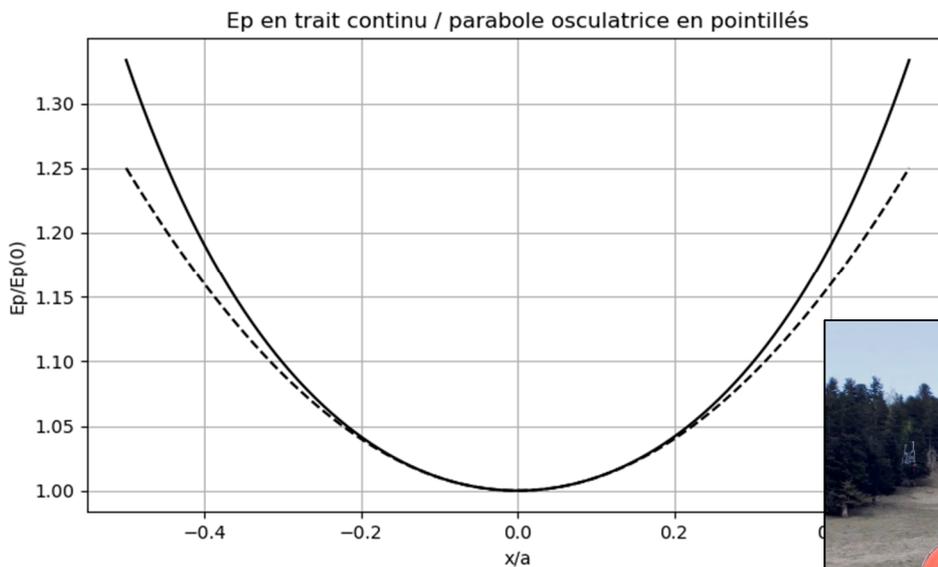
On néglige le poids dans cette dernière partie.

- 15. Etablir l'expression de l'énergie potentielle en fonction de  $x$  pour le point matériel de masse  $m$  situé entre les deux couches. Tracer l'allure du profil pour  $x \in [-\ell_0, \ell_0]$  en supposant que  $K > k$ .
- 16. Déterminer la période des oscillations du point matériel situé entre les deux couches. Attention cette question nécessite une réponse structurée et bien rédigée !
- 17. On considère que le ski se casse si l'un des deux ressorts arrive en butée ( $x = -\ell_0$  pour le ressort de constante de raideur  $K$  et  $x = \ell_0$  pour l'autre ressort). Déterminer l'énergie cinétique minimale qu'il faut fournir au point situé entre les deux couches pour casser le ski.

Une modélisation plus complexe donne une énergie potentielle dont l'expression en donnée ci-dessous où  $\gamma$  et  $a$  sont des paramètres positifs.

$$E_p = \frac{\gamma}{1 - (x/a)^2}$$

- 18. Déterminer la position d'équilibre.
- 19. Déterminer la stabilité de la position d'équilibre.
- 20. Déterminer la période des oscillations de faible amplitude autour de la position d'équilibre.
- 21. Voici la courbe d'énergie potentielle en fonction de  $x/a$  (en trait continu) et celle de la parabole osculatrice (en pointillés). Quelle est l'amplitude maximale au-delà de laquelle les oscillations ne peuvent plus être considérées comme isochrone.



- 22. Modifiez-vous votre réponse à la fin de la question 9 ?



## II. Le spectromètre de masse de Curiosity :

Un spectromètre de masse est un appareil permettant d'identifier les éléments présents dans un échantillon de matière inconnu.

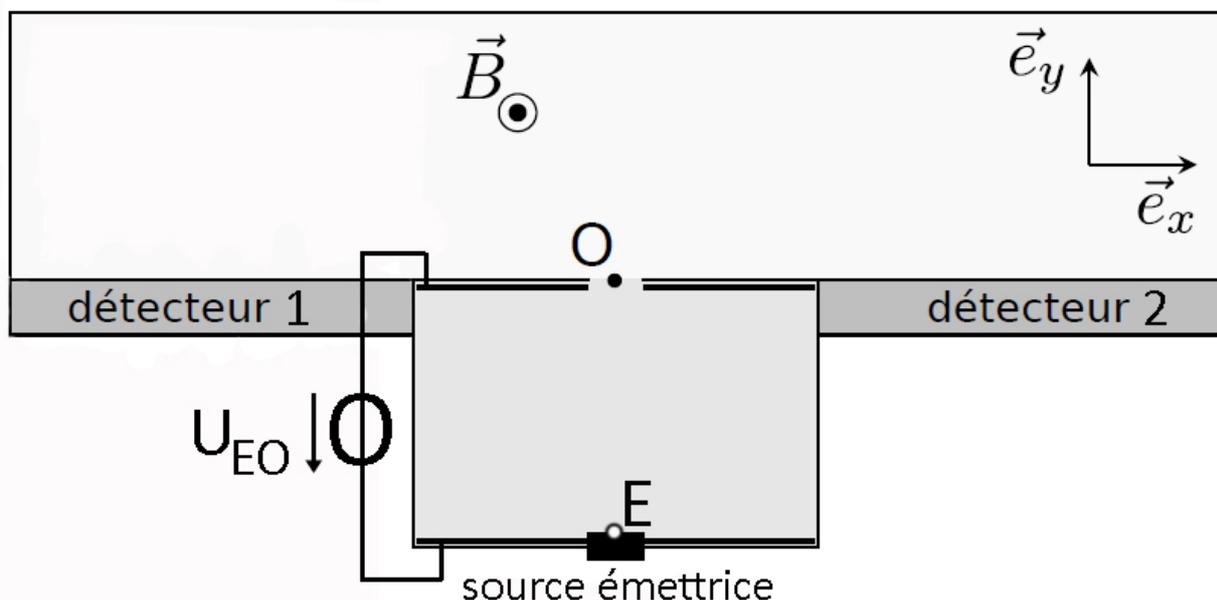
Le robot Curiosity sur Mars en comprend un, qui a notamment été utilisé pour déterminer le rapport de l'abondance isotopique entre hydrogène et deutérium, ce qui apporte des informations sur l'évaporation de l'eau sur cette planète.

L'échantillon est ionisé à l'entrée de l'appareil, si bien que des ions pénètrent sans vitesse initiale à l'entrée en E.

On note  $m$  leur masse et  $q$  leur charge. Ils sont accélérés entre E et O par l'application d'une tension  $U_{EO}$ .

Ils pénètrent ensuite en O dans une chambre où règne un champ magnétique  $\vec{B}$  uniforme et stationnaire. Ils sont déviés par ce champ et vont frapper un détecteur (cf. schéma).

1. Justifier le signe de la tension  $U_{EO}$  selon le signe de  $q$  pour que les ions arrivent en O.
2. Donner l'expression de la vitesse  $v_0$  des ions en O. L'expression donnée doit être valable quel que soit le signe de la charge  $q$ .
3. Justifier que dans la chambre où règne le champ magnétique, l'énergie cinétique des ions ne varie pas. Que peut-on donc dire de leur vitesse ?
4. On admet que la trajectoire des ions dans la chambre où règne le champ magnétique est circulaire. Établir l'expression du rayon  $R$  de la trajectoire et préciser si les ions arrivent sur le détecteur n°1 ou sur le détecteur n°2 en fonction du signe de  $q$ . Dessiner l'allure de la trajectoire pour des cations.
5. Déterminer la durée  $\tau$  du trajet entre O et le détecteur.
6. On note P le point d'impact de l'ion sur le détecteur. Donner la valeur de la distance OP pour un ion hydrogène  ${}^1\text{H}^+$  et pour un ion deutérium  $\text{D}^+$  (isotope de l'hydrogène de masse molaire  $2,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ ). Faire l'A.N. avec  $U = 10 \text{ kV}$ , la masse du proton  $= m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ , la charge élémentaire  $e$  [à connaître] et la valeur du champ magnétique  $B = 200 \text{ mT}$ .



### III. Trou noir au centre de la galaxie

Nous allons étudier quelques trajectoires liées d'un objet A de masse  $m$  en rotation autour d'un centre de force gravitationnelle de masse  $M_0$ .

#### A. Généralités

1. Démontrer que la trajectoire est plane.

Par la suite, l'objet A est repéré en coordonnées cylindriques dont le centre O est situé au centre de force.

2. Démontrer que la constante des aires  $C$  est bien une intégrale première du mouvement. Donner son expression dans le système de coordonnées choisi.

3. Démontrer l'existence d'une seconde intégrale première du mouvement.

#### B. Trajectoires circulaires

4. Si la trajectoire du point A est circulaire, exprimer (avec démonstration) sa vitesse en fonction du rayon  $r$  de sa trajectoire.

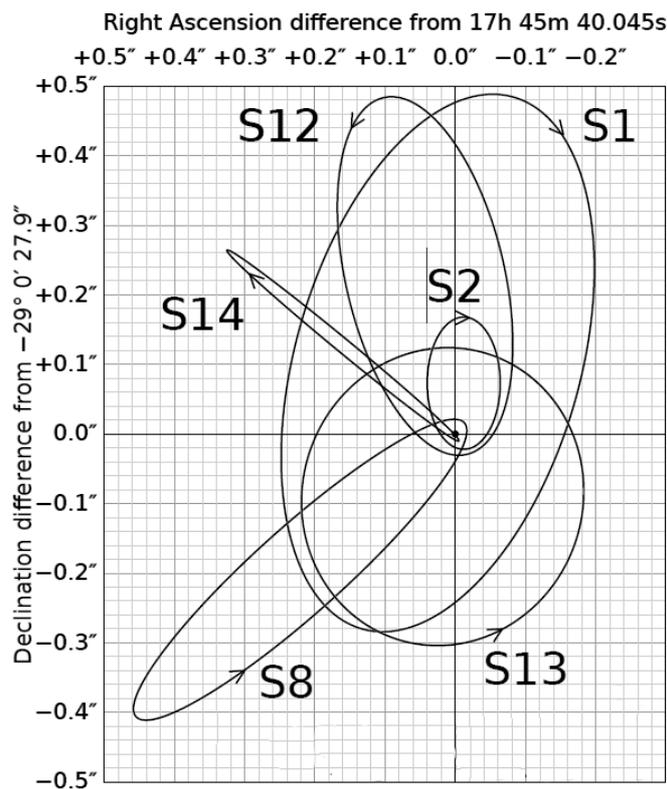
5. En déduire la relation entre la période de sa trajectoire et le rayon de celle-ci.

6. Quelques applications numériques (les données sont à la fin de l'énoncé) :

- Déterminer la période  $T_L$  de rotation de la Lune autour de la Terre,
- Déterminer la vitesse  $v_T$  de la Terre dans son mouvement autour du Soleil,

#### C. Trajectoires elliptiques

Nous savons aujourd'hui que presque toutes les galaxies ont en leur centre un trou noir supermassif. C'est le cas de la voie lactée. Ce trou noir n'a pas été observé directement mais nous avons une preuve indirecte de son existence par le suivi des trajectoires elliptiques d'étoiles proches du centre de la galaxie (cf. image ci-dessous).



On suppose que le mouvement de ces étoiles n'est dû qu'à l'attraction gravitationnelle du trou noir.

7. Etablir l'expression de l'énergie mécanique d'une étoile en mouvement elliptique dans le référentiel du centre de la galaxie en fonction du demi-grand axe de l'ellipse qu'elle parcourt.
8. En généralisant à l'ellipse la formule donnant la période d'une trajectoire circulaire (question 5) déterminer la masse du trou noir à partir des données de l'étoile  $S_2$ .
9. Déterminer la vitesse  $v_A$  de  $S_2$  à l'apocentre, puis sa vitesse  $v_p$  au péricentre. Doit-on utiliser la relativité restreinte pour étudier correctement la trajectoire de  $S_2$  ?

**Données numériques :**

**Constante de gravitation :**  $G = 6,67 \times 10^{-11} SI$

**La Terre :**

Masse :  $M_T = 6,0 \times 10^{24} kg$

Rayon :  $R_T = 6\,370 km$

Distance au soleil :  $d_{T/S} = 1 ua = 150 \times 10^6 km$

**La Lune :**

Masse :  $M_L = 7,4 \times 10^{22} kg$

Rayon :  $R_L = 1740 km$

Distance à la Terre :  $d_{T/L} = 384\,400 km$

**Le Soleil :**

Rayon :  $R_S = 700\,000 km$

Masse :  $M_S = 2,0 \times 10^{30} kg$

**Etoile  $S_2$  :**

Période :  $T_{S_2} = 11,2 années$

Apocentre :  $r_A = 1\,500 ua$  ( $1 ua = d_{T/S}$ )

Péricentre :  $r_p = 100 ua$

#### IV. Problème ouvert : game of 7 – version 2

Previously on DS4 :

« Pendant la pause, au lieu de sortir respirer l'air pur dans la cour, les élèves de PCSI 1 préfèrent jouer à une variante non officielle du ping-pong...

Il faut lancer la balle afin qu'elle fasse un nombre croissant de rebonds avant de tomber de la table : 1 rebond à la première tentative, 2 rebonds à la seconde, ... »

On modélise les frottements entre la balle et la table lors des rebonds ainsi :

- La vitesse horizontale n'est pas modifiée par le choc sur la table,
- La vitesse verticale change de signe et sa norme est multipliée par un coefficient de restitution  $e < 1$ .

Cela revient à dire que si le choc de durée négligeable se produit à l'instant  $t = 0$ , alors :

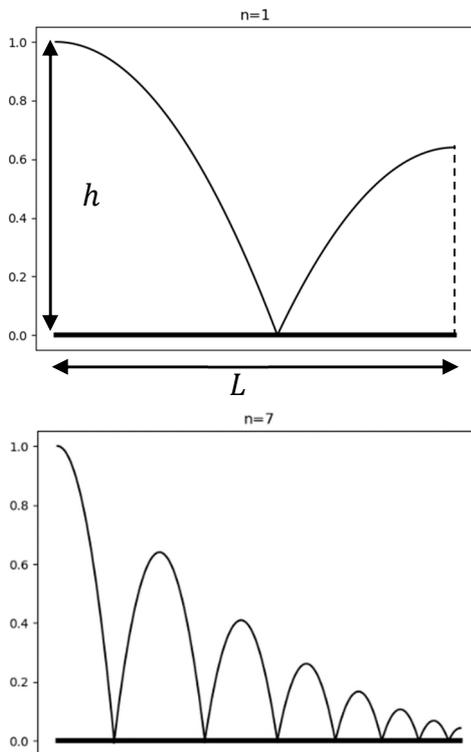
$$\vec{v}(0^-) \cdot \vec{e}_x = \vec{v}(0^+) \cdot \vec{e}_x$$

$$\vec{v}(0^-) \cdot \vec{e}_z = -e \vec{v}(0^+) \cdot \vec{e}_z$$

La balle est lancée d'une hauteur  $h$  avec une vitesse  $V_0$  horizontale.

Afin de diminuer l'influence des incertitudes sur  $h$  et  $V_0$ , on propose le schéma suivant pour l'allure des trajectoires :

- la balle est lancée à la verticale du bord de la table,
- la balle arrive à l'autre extrémité de la table au sommet de sa trajectoire.



1. La table ayant une longueur  $L$ , établir la relation entre le nombre  $n$  de rebonds souhaités, la hauteur  $h$ , la vitesse  $V_0$  de lancement et le coefficient de restitution  $e$ .
2. Proposer quelques lignes de code Python permettant de tracer la trajectoire de la balle. Prendre  $V_0 = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $h = 1 \text{ m}$ ,  $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  et  $e = 0,8$ . Calculer  $L$  en fonction de  $n$  et  $z(x)$ .