

DEVOIR SURVEILLE N°6

PHYSIQUE

I. Bourriquet l'explorateur :

Données numériques :

La Terre : Masse : $M_T = 6,0 \times 10^{24} \text{ kg}$

Distance au Soleil (centre à centre) : $r_T = 1 \text{ ua} = 149,6 \times 10^6 \text{ km}$

Période de sa trajectoire autour du soleil : $T_T = 365,25 \text{ jours}$.

Jupiter : Distance au soleil (centre à centre) : $r_J = 5,2 \text{ ua}$ ($1 \text{ ua} = d_{T/S}$)

Le Soleil : Rayon : $R_S = 700\,000 \text{ km}$

Masse : $M_S = 2,0 \times 10^{30} \text{ kg}$

Astéroïde DE04 : Rayon : $R_{DE04} = 2000 \text{ km}$

Masse : $M_{DE04} = M_S / (3,3 \times 10^7)$

Période de rotation sur lui-même : $T_{DE04} = 12 \text{ h}$

Dans tout le problème, on considère que la valeur numérique de la constante de gravitation n'est pas connue. Il faudra donc l'éliminer des expressions littérales en fin de calcul pour pouvoir réaliser les A.N.

Les variations de vitesse lors du fonctionnement des moteurs sont supposées instantanées et sans changement de direction de la vitesse.

A. Trajectoire de la Terre autour du Soleil

1. Montrer que le mouvement d'un astre soumis à la seule attraction gravitationnelle du Soleil est nécessairement plan.

2. Etablir l'expression de la constante C des aires en fonction de r et $\dot{\theta}$ des coordonnées polaires de l'astre dans le plan de sa trajectoire en prenant l'origine au centre du Soleil.

On considère que la Terre est sur une orbite circulaire autour du Soleil de rayon r_T parcourue en une durée T_T .

3. Exprimer la vitesse v_T de révolution de la Terre autour du Soleil en fonction de r_T et T_T uniquement puis faire l'A.N.

4. Etablir l'expression de la troisième loi de Kepler dans le cas de la trajectoire circulaire de la Terre et en déduire l'expression du produit GM_S en fonction de r_T et v_T . Faire l'A.N.

B. Le voyage de Bourriquet

Pour son exploration du système solaire le vaisseau de Bourriquet de masse m [le vaisseau, pas Bourriquet] est lancé depuis l'orbite de la Terre de rayon r_T avec une vitesse initiale dans le référentiel héliocentrique orthoradiale et de norme égale à $v_0 = \alpha v_T$ (avec $\alpha = 1,3$).

- 5. Justifier que sa trajectoire est une ellipse.
- 6. Déterminer les caractéristiques de sa trajectoire : demi-grand axe a , distance au Soleil à l'aphélie (r_A) et au périhélie (r_P) en fonction de r_T et de α . Faire l'A.N. en $u.a$ (donc calculer a et $r_{P/A}$ en fonction de r_T). Croise-t-il l'orbite de Jupiter ?
- 7. Montrer que sa vitesse à l'aphélie v_A peut s'écrire :

$$v_A = v_T \frac{(2 - \alpha^2)}{\alpha}$$

Lorsque le vaisseau est parvenu à l'aphélie de sa trajectoire, son moteur est brièvement enclenché de manière à multiplier instantanément la norme de sa vitesse par trois, sans changement de direction. Sa nouvelle vitesse est alors $v_1 = 3 v_A$.

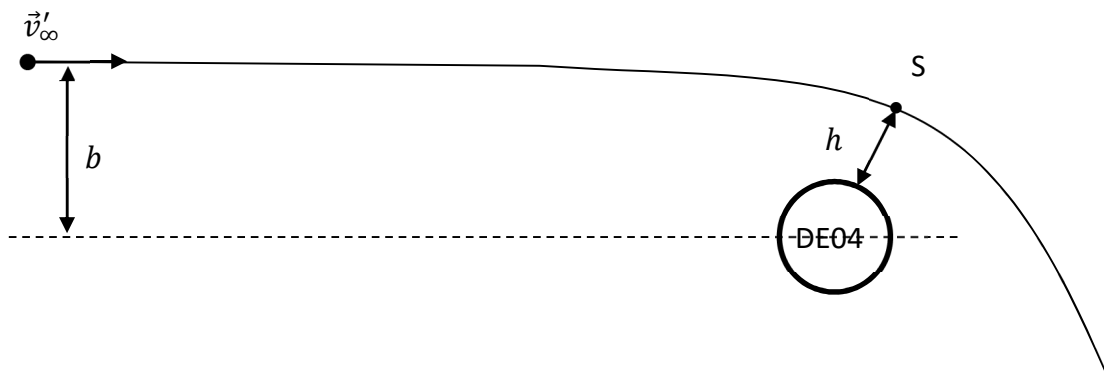
- 8. Déterminer la variation d'énergie mécanique ΔE_{m1} qui a été nécessaire pour le passage de v_A à v_1 en fonction de la masse du vaisseau et de v_A . D'où provient cette énergie ?
- 9. Justifier que sa trajectoire n'est plus une ellipse et donner la nature de cette nouvelle trajectoire ainsi que la vitesse v_∞ qu'aurait finalement le vaisseau s'il poursuivait sur cette trajectoire indéfiniment (en fonction de v_T et α). Faire l'A.N. pour v_∞/v_T .

Au cours cette trajectoire, il croise l'astéroïde sphérique DE04 de rayon R_{DE04} et de masse M_{DE04} . Il décide d'aller s'y poser pour quelques mois [le temps d'apprendre les bases de la physique...].

- 10. Y a-t-il des canapés à la surface de l'astéroïde DE04 ?

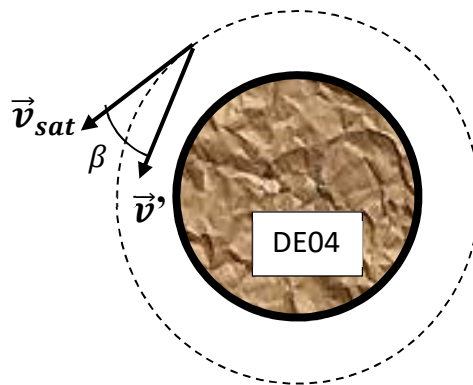
Au voisinage de cet astéroïde, on considèrera que l'attraction gravitationnelle du Soleil peut être négligée devant celle de l'astéroïde.

Dans un référentiel galiléen lié à l'astéroïde, le vaisseau spatial s'approche de celui-ci à la vitesse $v'_\infty = 1 \text{ km.s}^{-1}$ et avec un paramètre d'impact $b = 5000 \text{ km} = 3,34 \times 10^{-5} \text{ ua}$ (voir figure ci-dessous). On désigne par S le sommet de la trajectoire, point de la trajectoire le plus proche de l'astéroïde. On note r_S la distance correspondante du vaisseau au centre de l'astéroïde et v_S sa vitesse en ce point.



11. A l'aide de deux IP du mouvement, déterminer la vitesse v_S dans le référentiel DE04-centrique du vaisseau lors de son passage au sommet de l'hyperbole. Faire l'A.N. pour v_S/v_T .
12. Quelle sera alors la valeur de la distance h minimale à laquelle le vaisseau va passer de la surface de l'astéroïde DE04 ? Faire l'A.N.
13. Lors de son passage au point S , Bourriquet souhaite se mettre orbite d'altitude h autour de l'astéroïde. Le vaisseau doit-il diminuer ou augmenter sa vitesse pour réaliser ce changement de trajectoire [il faut bien sûr argumenter] ? Exprimer puis calculer la vitesse v_{sat} du vaisseau sur sa nouvelle orbite circulaire.

Un mouton introduit à bord réalise une mauvaise manipulation et la direction du vecteur-vitesse du vaisseau est brutalement déviée d'un angle β par rapport à la direction initiale (voir figure ci-dessous), sans modification de sa norme v_{sat} .



14. Montrer que le vaisseau partira alors sur une orbite elliptique et déterminer le demi-grand axe a' de cette trajectoire.
15. En exploitant la constante des aires C que l'on exprimera en fonction de l'angle β , montrer qu'au périhélie et à l'apogée, les distances du vaisseau au centre de l'astéroïde sont données par :

$$r'_A = (R_{DE04} + h)(1 + \sin \beta)$$

$$r'_P = (R_{DE04} + h)(1 - \sin \beta)$$

16. À quelle condition sur l'angle β la tragédie sera-t-elle évitée ? Faire l'A.N.

Bourriquet a trouvé l'astéroïde DE04 à son goût et s'y est installé définitivement... Le mouton a été renvoyé dans l'espace...



II. Anémomètres mécaniques (d'après CCINP PC 2022) :

On appelle **anémomètre** un instrument de mesure de la vitesse du vent.

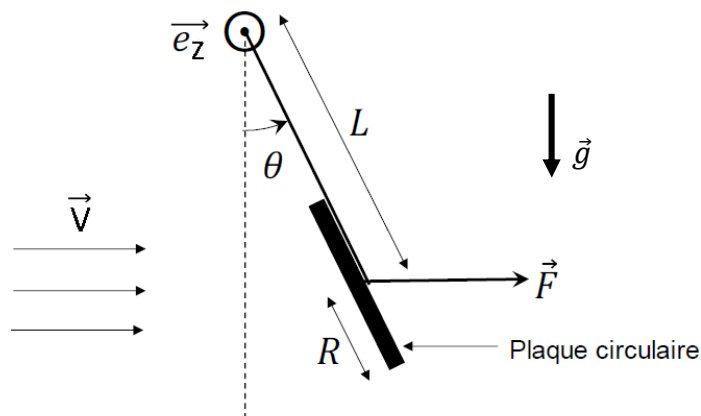
Les anémomètres mécaniques utilisent la mise en mouvement d'un objet sous l'effet du vent pour en déduire sa vitesse.

A. Anémomètre à plaque

Le premier anémomètre a été conçu en 1450 par l'italien Léon Battista Alberti.

Son principe repose sur la déviation d'une plaque attachée au bout d'une tige pouvant pivoter autour d'un axe horizontal. Le vent arrivant sur la plaque soulève cette dernière. L'inclinaison de la plaque permet de déduire la vitesse du vent.

Le schéma d'un anémomètre à plaque est représenté sur la figure ci-dessous :



La plaque circulaire homogène, de masse $m = 30 \text{ g}$ et de rayon $R = 5 \text{ cm}$ est attachée en son centre à une tige de longueur $L = 15 \text{ cm}$ et de même masse m . Le système {plaque + tige} peut tourner sans frottements autour d'un axe horizontal Oz orienté par le vecteur unitaire \vec{e}_z .

Le vent souffle horizontalement, perpendiculairement à l'axe Oz , avec une vitesse \vec{V} supposée constante, de l'ordre de quelques $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. Le moment d'inertie du système {plaque + tige} par rapport à l'axe Oz est donné par $J_{Oz} = 2,7 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ et on note θ l'angle formé par la tige avec la verticale.

Pour des angles d'inclinaison faibles, la résultante des forces aérodynamiques s'exerçant sur la plaque en raison du vent est de la forme $\vec{F} = \mu V \vec{V}$ avec $\mu = 1,2 \times 10^{-2} \text{ USI}$. Le point d'application de cette résultante des forces aérodynamiques est situé au centre de la plaque circulaire.

On donne l'accélération de la pesanteur : $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

- Déterminer la dimension puis l'unité de μ dans le système international d'unités.
- Déterminer l'expression de l'angle $\theta_{\text{éq}}$ lorsque l'ensemble est à l'équilibre. En déduire la valeur numérique de la vitesse V du vent lorsque $\theta_{\text{éq}} = 8^\circ$.
- Compléter les lignes de code Python données en annexe pour que l'exécution du programme permettent de déterminer l'incertitude-type sur V sachant que celle sur θ est $u(\theta) = 0,5^\circ$ et celle sur μ est $u(\mu) = 0,1 \times 10^{-2} \text{ SI}$.
- Déterminer l'expression de la réaction d'axe \vec{R}_{axe} à l'équilibre, la représenter sur un schéma et déterminer son angle α par rapport à la verticale. Faire l'A.N. pour α .

On souhaite étudier les petites oscillations de la plaque autour de sa position d'équilibre $\theta_{\text{éq}}$.

On pose pour cela $\varepsilon(t) = \theta(t) - \theta_{\text{éq}}$ avec $\varepsilon \ll 1 \text{ rad}$ et on rappelle que :

$$f(a + \varepsilon) = f(a) + \varepsilon f'(a) + o(\varepsilon)$$

5. Etablir, à l'aide du TMC et d'un développement limité au 1^{er} ordre en ε , l'équation différentielle vérifiée par la variable ε .
6. En déduire l'expression et la valeur numérique de la pulsation propre ω_0 des oscillations de faibles amplitudes autour de $\theta_{\text{éq}}$.
7. Pour amortir ces oscillations, un amortissement non représenté est ajouté au dispositif. Il a pour conséquence l'apparition d'un couple supplémentaire $\vec{\Gamma} = -\beta \dot{\theta} \vec{e}_z$ s'exerçant sur le système. Déterminer l'expression du coefficient β permettant l'amortissement le plus rapide.

Le vent est irrégulier, sa vitesse n'est pas parfaitement constante, et on modélise dans la suite ses variations sous la forme de fluctuations sinusoïdales de pulsation ω : $V = V_0 + V_m \cos(\omega t)$.

En prenant également en compte le système d'amortissement fluide évoqué à la question précédente, l'équation différentielle vérifiée par ε peut alors se mettre sous la forme :

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{\varepsilon} + \omega_0^2 \varepsilon = a \cos(\omega t)$$

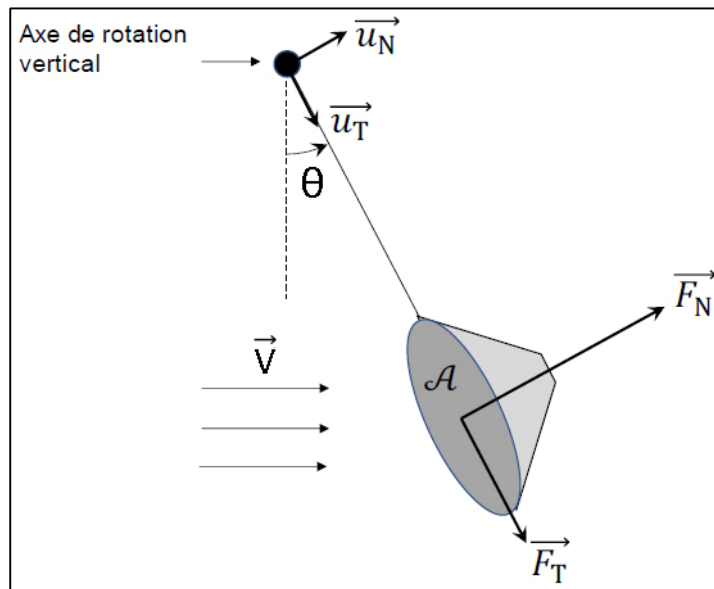
où le coefficient a est supposé connu. La démonstration de cette formule n'est **pas** demandée.

Lorsque le régime établi est atteint, $\varepsilon(t)$ est une fonction sinusoïdale de pulsation ω que l'on cherchera sous la forme $\varepsilon(t) = \varepsilon_m \cos(\omega t + \varphi)$.

8. Déterminer l'expression de l'amplitude ε_m des oscillations en fonction de ω , ω_0 , Q et a . Il est conseillé de passer par la notation complexe. De quel type de filtre s'agit-il ?
9. Tracer $\varepsilon_m(\omega)$ pour diverses valeurs de Q . Comment choisir ω_0 afin d'amortir autant que possible les fluctuations de la vitesse du vent ? Sachant que $\omega \approx 1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, cette condition est-elle réalisée ? Quelle valeur de Q faut-il alors prendre pour obtenir l'atténuation souhaitée ?

B. Anémomètre à coupelles

L'anémomètre à coupelles, inventé en 1846 par John Thomas Romney Robinson est aujourd'hui l'instrument de référence pour mesurer la vitesse du vent dans le domaine de la météorologie.



Il est composé de trois ou quatre coupelles creuses de forme hémisphérique ou conique, reliées à un axe de rotation vertical.

Pour étudier l'effet du vent sur une coupelle conique, on effectue des tests en soufflerie. La coupelle étant maintenue immobile, on relève la force aérodynamique s'exerçant sur elle. La mesure est effectuée pour différents angles d'incidence θ par rapport à la vitesse \vec{V} du vent.

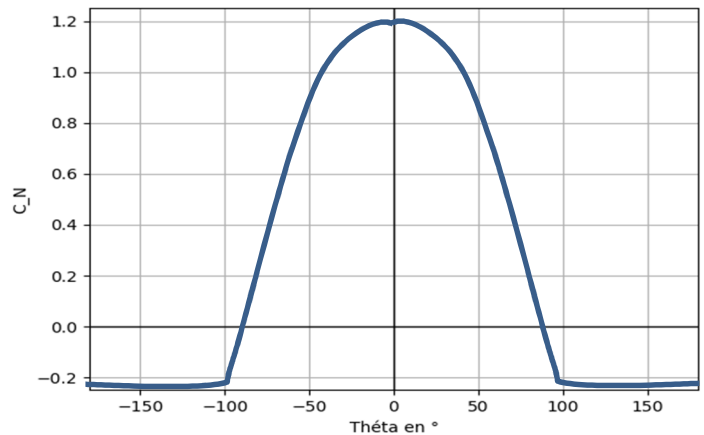
La force aérodynamique s'exerçant au centre de la coupelle se décompose en une composante \vec{F}_N normale à la surface $\mathcal{A} = 1,2 \text{ dm}^2$ de la base du cône, et une composante \vec{F}_T tangente à cette même surface. Les expressions de ces forces sont les suivantes :

$$\vec{F}_N = \frac{1}{2} \rho_{air} \mathcal{A} C_N V^2 \vec{u}_N$$

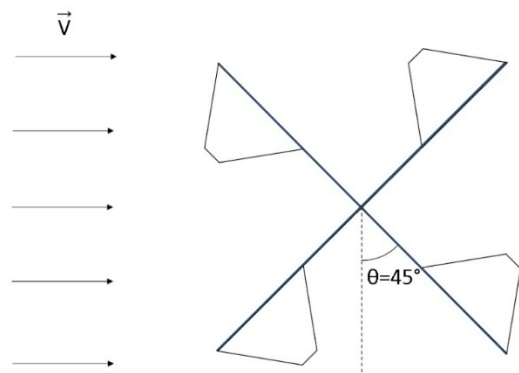
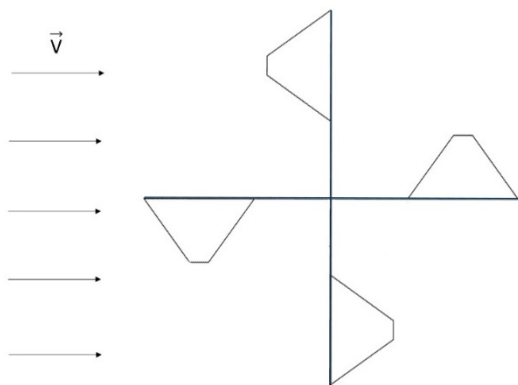
$$\vec{F}_T = \frac{1}{2} \rho_{air} \mathcal{A} C_T V^2 \vec{u}_T$$

où C_N et C_T sont des coefficients sans dimension qui dépendent de θ . On donne ci-dessous le relevé des variations du coefficient C_N avec l'angle θ :

Attention \vec{u}_N dépend de θ .



L'anémomètre étudié dans ce problème est constitué de quatre coupelles coniques décalées de 90° les unes par rapport aux autres et disposées de la façon suivante :



10. Les deux schémas précédents sont repris en annexe. En supposant que l'anémomètre est initialement immobile, représenter, les composantes normales \vec{F}_N s'exerçant sur chaque coupelle. On comparera les normes de ces forces les unes par rapport aux autres.

11. Justifier que la composante tangentielle \vec{F}_T n'intervient pas pour l'étude du mouvement de rotation de l'anémomètre.

12. Expliquer, à partir de ces schémas, pourquoi l'anémomètre va se mettre en mouvement, et représenter le sens de rotation sur les schémas.

13. Rappeler la définition d'un couple de forces. Peut-on parler du "couple" aérodynamique exercé par le vent sur l'ensemble de l'anémomètre ?

En régime permanent, l'anémomètre tourne à une fréquence f (nombre de tours par seconde) dépendant de la vitesse horizontale V du vent loin de l'anémomètre selon la relation :

$$V = \ell_0 f + V_0$$

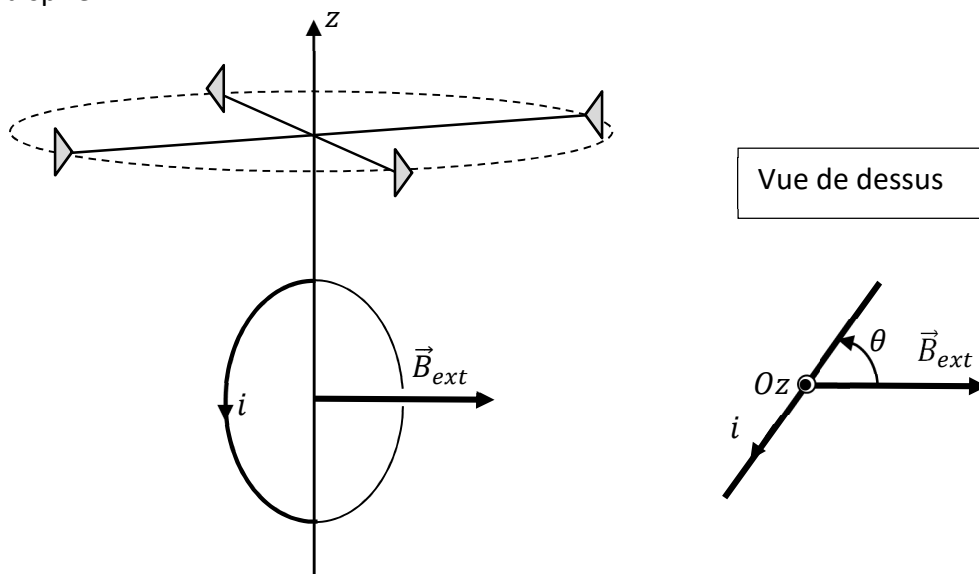
où ℓ_0 est appelée distance d'étalonnage et où V_0 est appelée vitesse de démarrage.

14. Lorsque la vitesse V du vent est inférieure à la vitesse de démarrage V_0 , l'anémomètre est immobile. Quel phénomène peut expliquer l'existence de cette vitesse de démarrage ?

Afin de mesurer la fréquence de rotation de l'anémomètre pour en déduire la vitesse du vent, on fixe une petite spire de surface S à l'axe de l'anémomètre.

La spire est entraînée par l'anémomètre dans son mouvement de rotation et elle est donc en rotation autour d'un de ses diamètres, à la même vitesse que l'anémomètre. Un champ magnétique \vec{B}_{ext} uniforme et stationnaire règne par ailleurs dans la zone de rotation de la spire. Ce champ est perpendiculaire à l'axe de rotation. La résistance électrique de la spire est notée R et l'auto-induction est supposée négligeable.

15. Exprimer le flux du champ magnétique à travers la spire en fonction de l'angle θ entre \vec{B}_{ext} et le plan de la spire.



16. Déterminer l'expression de la fém e_{ind} induite dans la spire. En déduire l'équation électrique de ce système.

17. Déterminer l'expression de la puissance moyenne $\langle P_j(R) \rangle$ reçue par la résistance sur un tour. Montrer que celle-ci est proportionnelle au carré de la fréquence de rotation f . La détermination de cette puissance permet donc de déterminer la fréquence f et donc la vitesse du vent V grâce à la relation : $V = \ell_0 f + V_0$.

18. A-t-on intérêt à remplacer la spire par une bobine de N spires identiques pour améliorer la sensibilité [augmenter $\langle P_j(R) \rangle$ pour une même fréquence de rotation] de ce détecteur ?

19. Définir le moment magnétique \vec{m} de la spire et rappeler le couple $\vec{\Gamma}_L$ exercé sur la spire par les forces de Laplace.
 20. Montrer que ce couple est toujours résistant quel que soit le sens de rotation de l'anémomètre.
 21. A quelle condition la présence de la spire ne perturbe-t-elle pas le fonctionnement de l'anémomètre ? L'éventuel remplacement de la spire par une bobine de N spires identiques (évoqué à la question 18) a-t-il une influence sur cette condition ?
-

III. Rails de Laplace avec un ressort de rappel

On étudie le mouvement d'un barreau conducteur sur des rails de Laplace horizontaux, de résistance électrique négligeable et distants de a .

La résistance électrique du barreau est noté R et sa masse m .

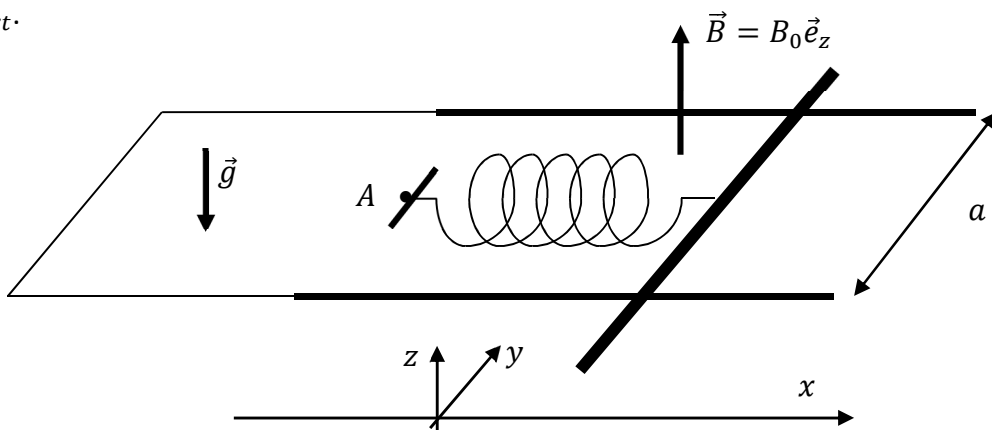
Le barreau est relié à l'extrémité d'un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 dont l'autre extrémité est fixée en un point A immobile.

L'origine de l'axe des x est prise au niveau du barreau lorsque la longueur du ressort est égale à sa longueur à vide ℓ_0 .

Au cours du mouvement le barreau reste perpendiculaire aux rails et se déplace sans frottements.

A $t = 0$, on ferme l'interrupteur, le barreau étant lâché immobile en un point d'abscisse $x_0 > 0$.

Il règne dans la zone balayée par le mouvement du barreau un champ magnétique uniforme et constant noté $\vec{B}_{ext} = B_0 \vec{e}_z$ avec $B_0 > 0$. Le champ magnétique propre du circuit est négligeable devant \vec{B}_{ext} .



1. Etablir l'expression du flux Φ du champ magnétique à travers le circuit. On pourra introduire, sans l'expliciter, un flux Φ_0 constant à travers la partie du circuit correspondant à $x < 0$ [ne pas oublier de faire un schéma pour introduire les grandeurs utilisées].
2. Etablir l'équation électrique du circuit.
3. Etablir l'équation mécanique décrivant le mouvement du barreau.
4. Découpler le système et en déduire l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$.
5. Introduire les grandeurs intéressantes et faire une pause homogénéité.
6. Résoudre l'équation donnant $x(t)$ dans le cas du régime pseudopériodique.
7. Citer la loi de Lenz et l'illustrer sur cet exemple.

Annexe :

```

# DS 06 23-24 Python.py

from math import *
import numpy as np
import numpy.random as rd
#-----
## Rappels sur quelques fonctions
# rd.uniform(-1,1,N) : renvoie un tableau numpy de dimension 1 de N
valeurs uniformément réparties dans l'intervalle : [-1, 1]

# np.average(T) : renvoie la moyenne des valeurs du tableau de dimension 1
# np.std(T,ddof=1) : renvoie l'écart-type des valeurs du tableau de dimension 1
# np.tan(T) : renvoie la tangente des valeurs du tableau T en radians
#-----
O = 8      # en degrés
u_0 = 0.5  # en degrés
g = 9.8   # en m/s2
m = 0.030 # en kg
mu = 0.012 # en USI
u_mu = 0.001# en USI

N =
mu_simul =

O_simul =

V_simul =

V_moy =

u_V =

print("la vitesse moyenne est : ", V_moy)
print("l'incertitude-type sur V est : ", u_V)

```

