

DEVOIR SURVEILLE N°7

PHYSIQUE

I. Principe de fonctionnement d'un alternateur (d'après Centrale – TSI – 2012)

Au cœur des centrales électriques, la rotation des turbines entraîne des alternateurs dont le principe de fonctionnement simplifié est étudié dans ce problème.

La production d'électricité découle de la mise en rotation d'un aimant permanent par les turbines au voisinage d'une bobine reliée à une résistance dite de charge R_{ch} .

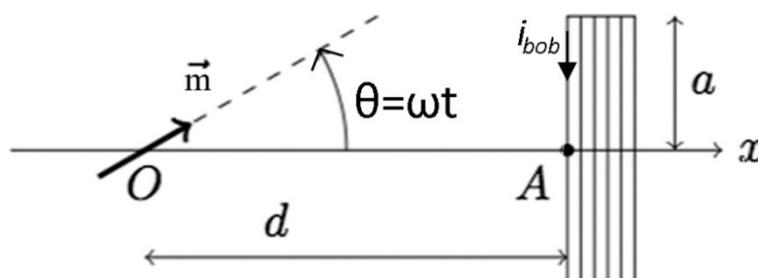
A. Equivalence entre un aimant et une spire

1. Représenter sur la copie un aimant droit de moment magnétique \vec{m} en faisant apparaître ses faces Sud et Nord, son moment magnétique \vec{m} et tracer l'allure de quelques lignes de champ magnétique dans son voisinage. Penser à orienter les lignes de champ.
2. On recherche les caractéristiques de la spire qui pourrait être substituée à l'aimant tout en conservant des lignes de champ identiques. Indiquer sur un schéma clair la position de la spire ainsi que l'orientation du courant qui la parcourt pour qu'il en soit ainsi. Donner la relation entre le moment magnétique \vec{m} de l'aimant, le rayon r de la spire, l'intensité i qui la parcourt afin que l'intensité du champ magnétique créé par la spire soit identique à celui créé par l'aimant en tout point de l'espace.

B. Flux magnétique de l'aimant à travers la bobine

L'aimant permanent, de moment magnétique \vec{m} , est positionné au point origine O . La turbine entraîne l'aimant dans un mouvement de rotation uniforme à la vitesse angulaire ω autour de l'axe vertical (Oz) et forme à chaque instant un angle $\theta = \omega t$ avec l'axe (Ox).

Une bobine plate d'axe (Ox), de rayon a et comportant N spires, est positionnée au point A situé à une distance d du point origine O sur l'axe (Ox) (voir figure ci-dessous).



On souhaite exprimer le flux $\Phi_{a \rightarrow bob}$ du champ magnétique créé par l'aimant à travers la bobine. Pour cela on va exprimer dans un premier temps le flux $\Phi_{bob \rightarrow a}$ du champ magnétique créé par la bobine à travers l'aimant.

Comme la notion de contour de l'aimant est difficile à définir, on remplace temporairement l'aimant par la spire équivalente introduite à la question 2. En négligeant l'épaisseur de la bobine devant d , on peut montrer (cf. deuxième année) que la bobine parcourue par un courant d'intensité i_{bob} est à l'origine d'un champ magnétique \vec{B}_{bob} dont l'expression sur l'axe (Ox) est la suivante :

$$\vec{B}_{bob} = \frac{\mu_0 N i_{bob}}{2} \frac{a^2}{(a^2 + d^2)^{3/2}} \vec{e}_x = \alpha i_{bob} \vec{e}_x$$

3. Déterminer le flux $\Phi_{bob \rightarrow spire}$ du champ magnétique créé par la bobine à travers la spire équivalente à l'aimant. On considère que le rayon de la spire r est suffisamment petit pour que l'on puisse supposer que le champ magnétique de la bobine en O est uniforme sur la spire.
4. A l'aide du théorème de Neumann que l'on citera [clairement !], exprimer le flux $\Phi_{spire \rightarrow bob}$ du champ magnétique créé par la spire équivalente à l'aimant à travers la bobine.
5. En déduire le flux $\Phi_{a \rightarrow bob}$ du champ créé par l'aimant à travers la bobine en fonction de a , d , ω , N et $m = \|\vec{m}\|$.

C. Induction et équation électrique

La bobine est directement branchée sur la résistance de charge R_{ch} . L'inductance propre de la bobine est notée L et sa résistance de bobinage est négligeable devant la résistance de charge.

6. Énoncer la loi de Faraday et en déduire l'expression de la f.é.m induite e_{ind} apparaissant dans le circuit contenant la bobine.
7. Montrer que l'intensité i_{bob} dans la bobine vérifie l'équation différentielle suivante :

$$L \frac{di_{bob}}{dt} + R_{ch} i_{bob} = \alpha m \omega \sin \omega t$$

8. Résoudre cette équation en supposant le régime sinusoïdal établi [on rappelle que la vitesse de rotation ω de l'aimant est constante]. On introduira l'intensité complexe du courant dans la bobine $\underline{i}_{bob} = i_m \exp(j\varphi) \exp(j\omega t)$ et on déterminera i_m et φ .

D. Equation mécanique

Pour l'étude mécanique du mouvement de rotation de l'aimant, on néglige les frottements mécaniques au niveau de l'axe (Oz) de rotation du rotor solidaire de l'aimant. On note J_{Oz} le moment d'inertie du rotor.

9. Déterminer le couple $\vec{\Gamma}_L$ des forces de Laplace exercées sur l'aimant.
10. En déduire le moment \vec{M}_{turb} exercé par la turbine sur l'axe (Oz) afin de maintenir constante la vitesse de rotation ω de l'aimant. Calculer sa valeur moyenne en fonction de m , α , ω , R_{ch} et L .

E. Bilan de puissance

- 11.** Faire un bilan de puissance électrique et l'interpréter.
- 12.** Tracer l'allure des variations de la puissance moyenne $P_{moy}(R_{ch})$ dissipée dans la résistance de charge avec la vitesse de rotation ω . Comment choisir la vitesse de rotation ω afin de maximiser cette puissance moyenne ?
- 13.** Faire un bilan de puissance mécanique. En déduire l'expression de la puissance moyenne $P_{moy}(turb)$ fournie par la turbine.
- 14.** Etablir un bilan électromécanique après avoir identifié un terme de couplage entre les bilans électrique et mécanique. Interpréter.

Quelques rappels de trigonométrie :

$$\begin{aligned}\cos a \cos b &= \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)] \\ \sin a \sin b &= -\frac{1}{2}[\cos(a+b) - \cos(a-b)] \\ \sin a \cos b &= \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)] \\ \cos a \sin b &= \frac{1}{2}[\sin(a+b) - \sin(a-b)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(\text{Arctan } x) &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} & \forall x \in \mathbb{R} \\ \cos(\text{Arctan } x) &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} & \forall x \in \mathbb{R} \\ \tan(\text{Arctan } x) &= x & \forall x \in \mathbb{R} \\ \cotan(\text{Arctan } x) &= \frac{1}{x} & \forall x \in \mathbb{R}^*\end{aligned}$$

II. L'effet dynamo, origine du champ géomagnétique (d'après Centrale-Supélec PC 2016) :

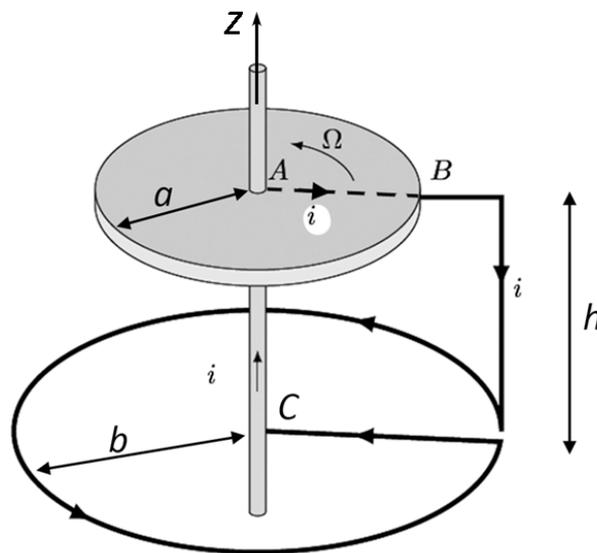
Ce sujet propose d'étudier les conséquences du mouvement d'un fluide conducteur électrique en présence d'un champ magnétique. Cette étude porte notamment sur l'effet dynamo, qui est l'hypothèse la plus crédible à ce jour pour expliquer la présence du champ magnétique terrestre.

Dès le XVII siècle, il a été imaginé qu'une sorte de super aimant permanent soit au centre de la Terre et crée le champ géomagnétique.

Au cours des siècles qui suivirent, diverses hypothèses furent formulées sans qu'aucune d'elles n'apporte d'interprétation réellement satisfaisante. On pense désormais que le champ magnétique de la Terre résulte d'un processus de régénération continue associée à des courants électriques.

Dans la suite, le but est de décrire l'effet dynamo, effet qui pourrait être à l'origine du champ magnétique terrestre et proposé dès 1919 par Joseph LARMOR.

On étudie la géométrie de BULLARD, dispositif le plus simple siège d'un effet dynamo :



Le dispositif est constitué d'un disque conducteur d'axe de symétrie (Oz), de moment d'inertie J_{Oz} par rapport à cet axe, en rotation à la vitesse angulaire Ω . La liaison entre le disque et l'axe de rotation est supposée idéale. Un fil électrique, en contact parfait entre l'extrémité de la roue (point B) et son axe (point C), permet de créer un circuit fermé passant par l'axe conducteur de la roue. La partie inférieure de ce circuit forme une spire, orientée de telle manière que le champ magnétique créé par cette spire vienne renforcer le champ magnétique extérieur (initialement à l'origine du courant induit d'intensité i).

On note a le rayon du disque, b celui de la spire et h la distance entre le disque et la spire. On se place dans l'hypothèse que $a \ll b$.

On appelle M le coefficient de mutuelle inductance entre la spire et le disque, tel que le flux du champ \vec{B} créé par la spire à travers le disque, orienté selon \vec{e}_z , s'écrive :

$$\phi_{spire \rightarrow disque} = Mi$$

Compte tenu de l'hypothèse $a \ll b$, on supposera par la suite que le champ magnétique \vec{B} est uniforme sur la surface du disque.

1. En déduire l'expression de l'intensité B du champ magnétique \vec{B} créé par la spire en fonction de M , i et a . On considère le disque comme une surface orientée de telle manière que sa normale \vec{n} soit dirigée selon $+\vec{e}_z$.

Le disque métallique étant en rotation dans le champ magnétique créé par la spire, il apparaît une force électromotrice induite e_{ind} , entre le centre du disque (point A) et son extrémité en contact avec le fil (point B). On admet que les diverses lignes de courant qui prennent naissance dans le disque conducteur sont équivalentes à un unique rayon conducteur $[AB]$.

La détermination directe de cette force électromotrice est délicate et hors programme [flux coupé]. On peut néanmoins contourner cette difficulté et obtenir l'expression de la f.é.m induite en exploitant un résultat très général de l'induction, à savoir que la somme de la puissance mécanique $P_f(\vec{F}_L)$ fournie au disque par la force de Laplace et de la puissance électrique $P_f(e_{ind})$ fournie au circuit par la f.é.m induite est nulle :

$$P_f(\vec{F}_L) + P_f(e_{ind}) = 0$$

2. Donner l'expression de la force de Laplace \vec{F}_L subie par le disque.
 3. Calculer le moment de cette force par rapport à l'axe Oz . On sera très vigilant sur le signe [pas de résolution au « niveau 1 » - bien rédiger la réponse].
 4. Déterminer la puissance $P_f(\vec{F}_L)$ fournie par cette force.
 5. En déduire que la f.é.m induite s'exprime selon :

$$e_{ind} = \frac{a^2 B}{2} \Omega$$

On note R la résistance totale du circuit et L le coefficient d'auto-induction de la spire.

6. Représenter le schéma électrique équivalent au dispositif et montrer que l'équation électrique est la suivante [en utilisant le résultat de la question 1] :

$$L \frac{di}{dt} = \left(\frac{M\Omega}{2\pi} - R \right) i$$

On parle d'effet dynamo si l'interaction entre la spire et le disque se traduit par la croissance de la valeur absolue de l'intensité $i(t)$ dans le circuit.

7. En déduire la condition sur Ω pour démarrer l'effet dynamo.

On considère que la rotation du disque est assurée par un couple moteur constant Γ_m et que sa vitesse angulaire de rotation dépend du temps : $\Omega = \Omega(t)$.

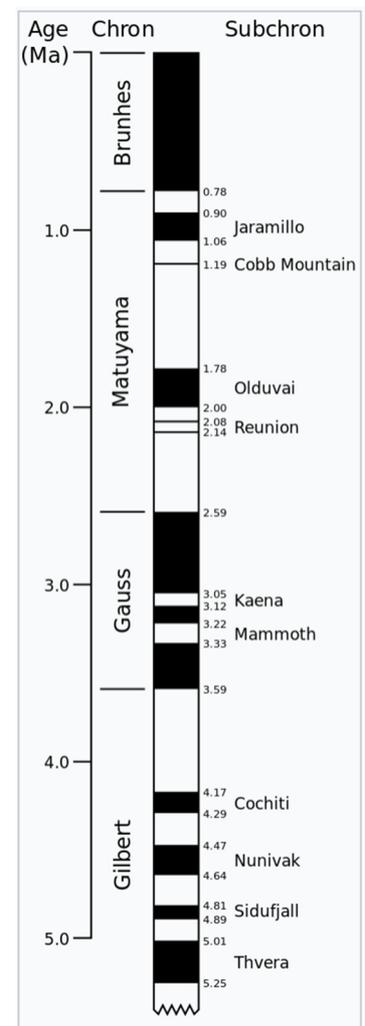
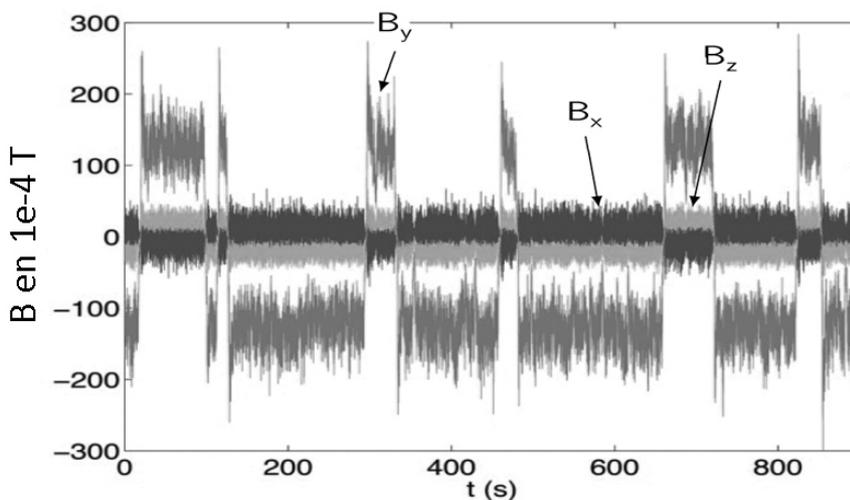
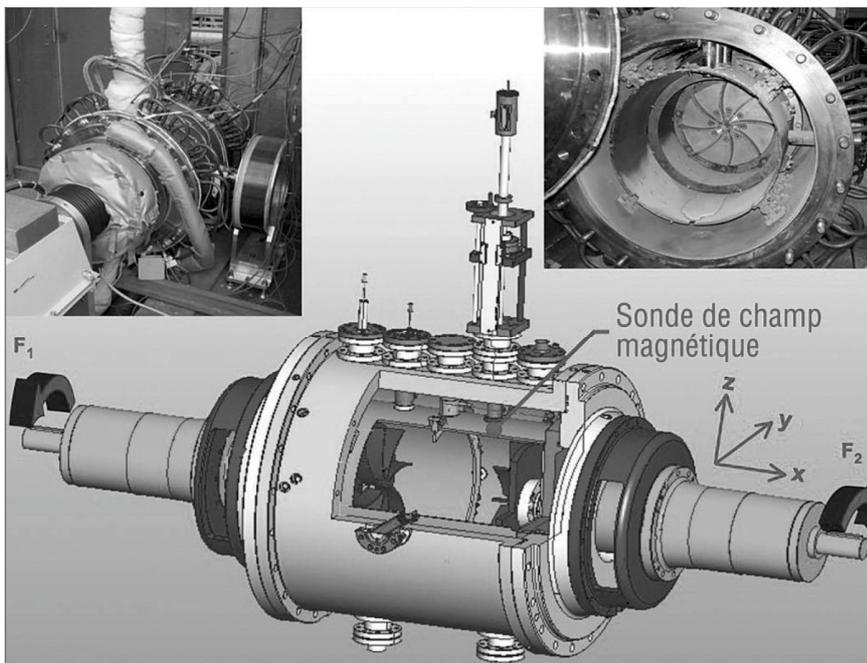
8. Établir l'équation différentielle dite « mécanique » du système :

$$J_{Oz} \frac{d\Omega}{dt} = \Gamma_m - \frac{M i^2}{2\pi}$$

9. Déterminer les expressions de i et Ω en régime stationnaire.

10. A l'aide des équations précédentes, faire un bilan de puissance électromécanique de la dynamo en régime quelconque. Préciser la signification physique des différents termes apparaissant dans le bilan.
11. Que devient le bilan énergétique en régime stationnaire ?
12. Pourquoi le modèle développé dans ce problème est-il compatible avec deux orientations opposées du champ magnétique ? De ce point de vue, le modèle développé permet l'inversion de polarité du champ magnétique terrestre observée régulièrement au cours de l'histoire de la Terre (voir ci-dessous).

Remarque : en mars 2007, l'expérience VKS2 regroupant les laboratoires de l'ENS Lyon, Cachan et le CEA Saclay à Cadarache, a permis d'obtenir un champ magnétique sans excitation extérieure (effet dynamo) par un écoulement turbulent de sodium liquide. Ils ont ainsi observé des renversements erratiques du champ magnétique créé.



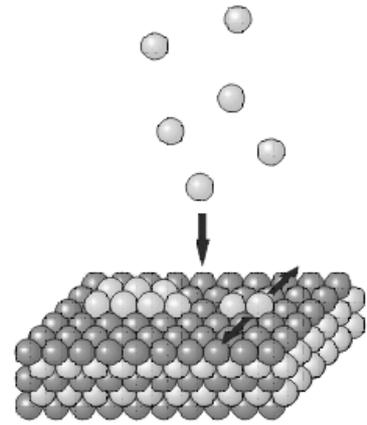
Les périodes figurées en noir correspondent à une orientation du champ magnétique identique à l'orientation actuelle.

(1 Ma = 10⁶ années)

III. Epitaxie par jet moléculaire (d'après banque PT 2016) :

L'épitaxie par jet moléculaire consiste à projeter des molécules (ou atomes) en direction d'une couche monocristalline déjà formée, le substrat, afin qu'elles se fixent à sa surface.

Les molécules parviennent sur la surface avec un débit très lent et dans un vide très poussé de manière à ce que le nombre de molécules qui se fixent sur le substrat soit maîtrisé. Le processus est achevé lorsqu'une couche est entièrement formée.



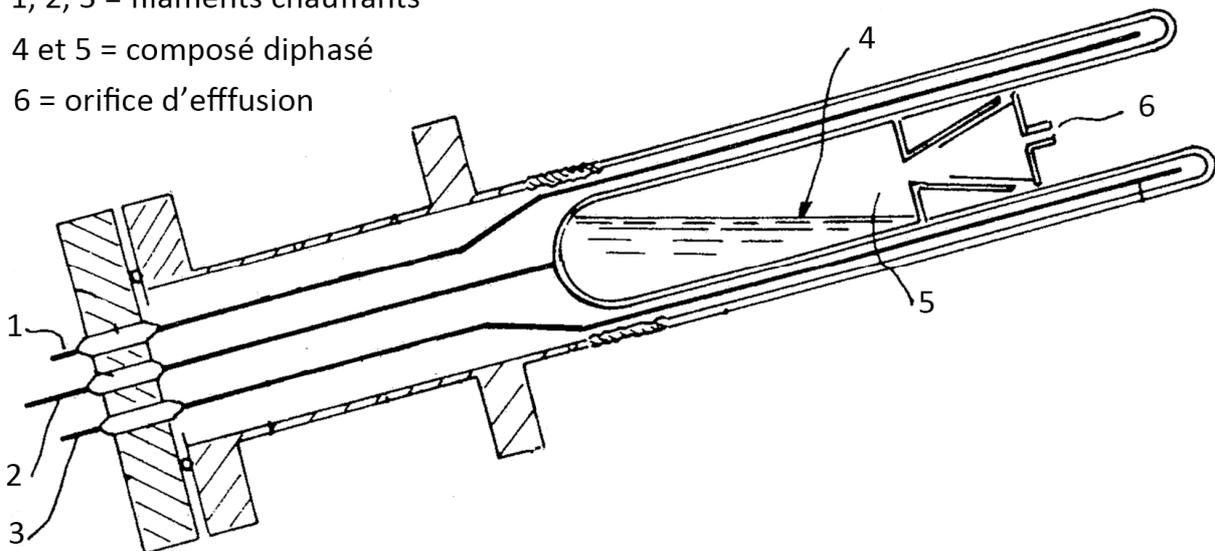
A. Principe d'une cellule de Knudsen

Le jet moléculaire peut être produit par une source appelée cellule de KNUDSEN. Il s'agit d'un creuset rigide contenant le composé à déposer sur le substrat. Dans ce problème, il s'agit du Gallium (symbole Ga), utilisé notamment pour réaliser des couches de semi-conducteurs à base d'Arséniure de Gallium GaAs.

Le creuset est entouré de plusieurs filaments chauffants (1, 2 et 3 sur la figure ci-dessous) destinés à maintenir le creuset et son contenu à une température T donnée. La température est choisie de manière à ce qu'une partie du Gallium soit à l'état liquide tandis que le reste est à l'état gazeux (ou vapeur) : on dit que le Gallium se trouve alors dans un état diphasé dans le creuset (4 et 5 sur la figure).

Le creuset est par ailleurs percé d'un petit trou (6) de section S_1 par lequel des molécules du gaz peuvent s'échapper (on parle d'effusion gazeuse). Le diamètre du trou est suffisamment petit pour que l'on puisse considérer que le système diphasé situé à l'intérieur du creuset ne soit pas perturbé par l'effusion des atomes de Gallium.

- 1, 2, 3 = filaments chauffants
- 4 et 5 = composé diphasé
- 6 = orifice d'effusion



Données numériques :

Section totale du trou : $S_1 = 5 \text{ mm}^2$

Température du mélange diphasé : $T_1 = 1200 \text{ K}$

Pression de la vapeur : $p_1 = 0,2 \text{ Pa}$

Masse molaire du Gallium : $M_1 = 69,7 \text{ g. mol}^{-1}$

Constante des gaz parfaits : $R = 8,314 \text{ J. K}^{-1}. \text{mol}^{-1}$

Nombre d'Avogadro : $N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

Hypothèses du modèle d'étude :

- On néglige tout effet de la pesanteur ;
- La phase gazeuse est assimilée à un gaz parfait ;
- À l'extérieur du creuset règne un vide poussé et on considèrera que lors de l'effusion du Gallium aucun atome ne pénètre depuis l'extérieur vers l'intérieur du creuset.

On souhaite exprimer le flux Φ_1 d'atomes de Gallium s'échappant du creuset.

1. Rappeler les 3 hypothèses du gaz parfait microscopique et l'équation d'état macroscopique des gaz parfaits.

2. Rappeler la définition de la vitesse quadratique, notée v_q dans la suite. Rappeler la relation entre l'énergie cinétique moyenne $\langle E_{c,trans} \rangle$ de translation d'un atome au sein d'un gaz parfait et la température T de ce gaz.

En déduire l'expression de la vitesse quadratique v_q en fonction de la température du gaz T , de sa masse molaire M et de la constante des gaz parfaits R .

En déduire la valeur numérique de la vitesse quadratique v_q des atomes de Gallium à la température T_1 .

3. La distribution des vitesses de Maxwell donne la densité de probabilité pour une particule d'avoir une vitesse de norme v . Donner l'allure (en noir) de cette distribution pour un gaz constitué de particules de masse molaire M_1 à la température T_1 .

Compléter la figure en ajoutant l'allure de cette distribution (en bleu) pour un gaz constitué de particules de masse molaire $M_2 > M_1$ à la même température T_1 .

Ajouter également l'allure de cette distribution (en vert) pour un gaz constitué de particules de masse molaire M_1 à la température $T_2 > T_1$.

Dans la suite, on supposera que toutes les molécules du gaz ont une vitesse de norme égale à v_q .

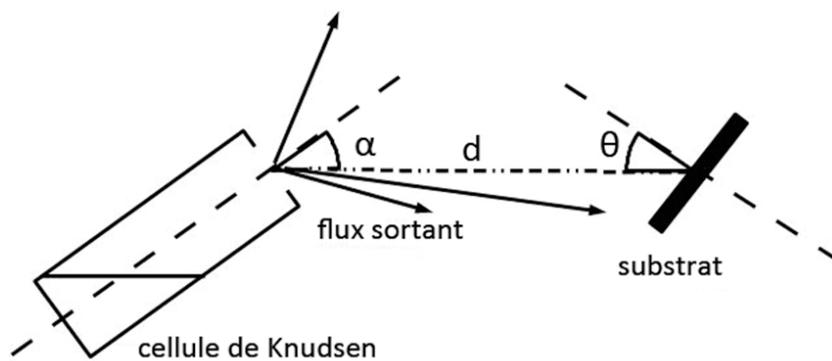
4. On définit le flux Φ_1 d'atomes de Gallium traversant la surface S_1 par le nombre d'atomes traversant cette surface par unité de temps. En proposant un modèle simple pour traduire l'isotropie des vitesses, exprimer le flux Φ_1 en fonction de p_1, T_1, M_1, R, S_1 et du nombre d'Avogadro N_A . En déduire la valeur numérique de Φ_1 .

B. De la cellule de KNUDSEN au substrat

Le flux Φ_1 d'atomes de Gallium qui émerge de la cellule de KNUDSEN a dans cette partie une valeur numérique différente de celle obtenue à la question 4 précédente.

Sans interactions et sans chocs, les atomes de Gallium se dispersent dans tout l'espace depuis la cellule. Seule une fraction de ces atomes se déposera donc sur le substrat (voir figure ci-dessous). Le flux Φ_2 finalement reçu par le substrat dépend de la surface S_2 du substrat, de la distance d entre le trou de la cellule et le substrat et des orientations relatives de la cellule et du substrat (voir figure ci-dessous). On peut montrer que le flux Φ_2 parvenant sur le substrat se met sous la forme :

$$\Phi_2 = \Phi_1 \times \frac{S_2}{\pi d^2} \times \cos \alpha \cos \theta$$

**Hypothèses pour la suite :**

- Distance entre les centres des atomes de Gallium sur une monocouche de substrat : a ;
- Les atomes forment sur une couche un maillage carré ;
- On se place dans les conditions optimales $\alpha = \theta = 0$.

Données numériques :

Flux émergent de la cellule de Knudsen : $\Phi_1 = 10^{16} \text{ s}^{-1}$

distance entre le trou de la cellule et le substrat : $d = 2,0 \text{ cm}$

Distance interatomique : $a = 0,30 \text{ nm}$

5. Déterminer le nombre N_2 d'atomes de Gallium composant une monocouche de surface S_2 en fonction de S_2 et a .

6. Estimer le temps Δt_1 nécessaire pour former une monocouche complète en fonction de d , a et Φ_1 , en supposant que tout atome parvenant à la surface du substrat s'y fixe. Faire l'A.N.

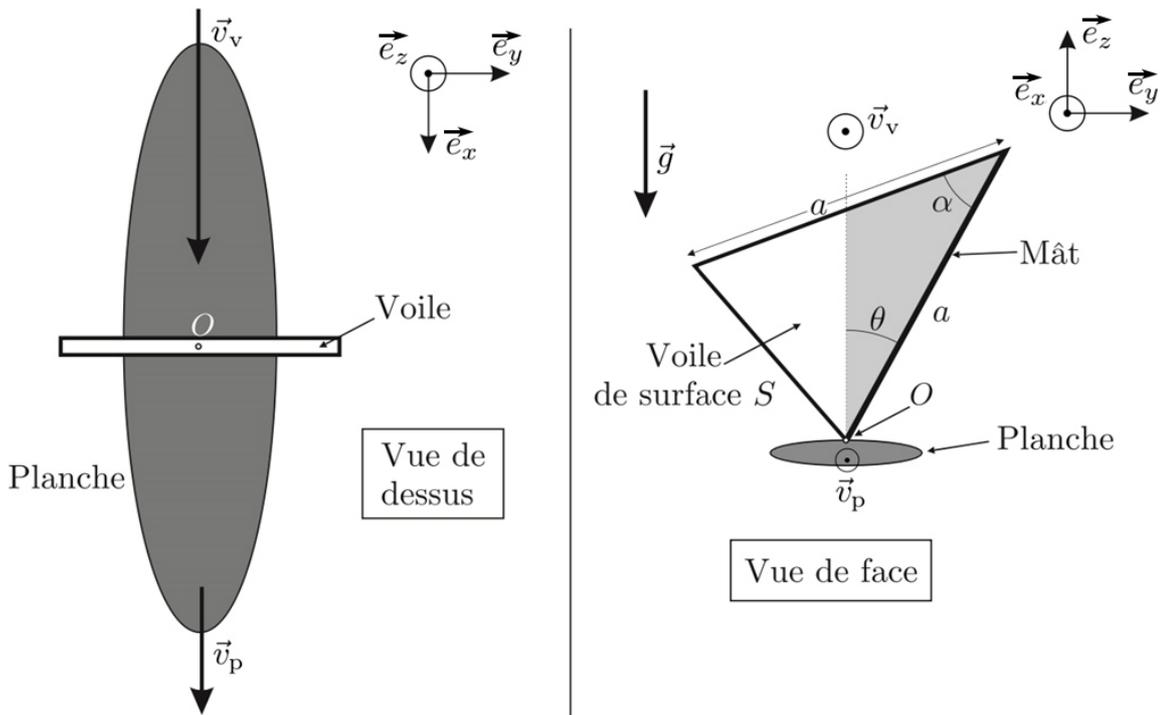
7. En déduire la valeur numérique du temps Δt_2 nécessaire pour fabriquer une couche d'épaisseur $e = 1 \mu\text{m}$.

IV. Navigation d’une planche à voile par vent arrière (d’après Mines-Pont PC&PSI 2023) :

On étudie dans ce problème la propulsion d’une planche à voile grâce au vent dans une situation dite de vent arrière, dans le cadre d’un modèle très simplifié. La planche à voile se déplace dans la même direction que le vent (voir figure ci-dessous).

La vitesse du vent est supposée constante, elle est caractérisée par le vecteur $\vec{v}_V = v_V \vec{e}_x$.

La vitesse de la planche à voile est quant à elle caractérisée par le vecteur $\vec{v}_P = v_P \vec{e}_x$, colinéaire à \vec{v}_V et telle que $\vec{v}_V \cdot \vec{v}_P > 0$.



La voile est assimilée à un triangle isocèle plein de surface S , dont l’un des deux côtés de longueur identique a constitue le mât de la voile. L’angle au sommet symétrique du triangle isocèle est appelé α . Le mât de la voile fait un angle θ avec la verticale.

Le poids du mât sera négligé dans cette partie. Le point d’attache du mât sur la planche est noté O . Dans cette partie, nous supposons que le plan de la voile est orthogonal à la fois à la direction du vent et au plan contenant la planche. Le plan de la planche est supposé horizontal. Ces différentes informations sont récapitulées sur la figure ci-dessus.

Afin d’estimer la force propulsive du vent dans la voile dans cette configuration particulière, le modèle le plus simple consiste à supposer que l’air est un gaz homogène composé de particules de masse m se déplaçant à une vitesse \vec{v}_V .

Lors du choc avec la voile, ces particules cèdent intégralement leur quantité de mouvement à la voile.

Dans les questions 1 à 5, on négligera la vitesse de la planche à voile \vec{v}_P par rapport à celle du vent.

1. Exprimer le nombre N de particules d'air qui entrent en collision avec la voile pendant un temps Δt en fonction de m , S , v_V , Δt et de la masse volumique de l'air notée ρ_a .
2. Déterminer l'expression de la force \vec{f} exercée sur la voile lors de l'impact d'une unique particule (sur la durée Δt).
3. En déduire l'expression de la force propulsive \vec{F} exercée sur la voile par le vent en fonction de ρ_a , v_V et S . Faire l'A.N. pour $\rho_a = 1,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $S = 5 \text{ m}^2$ et $v_V = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Il existe une valeur d'angle θ notée θ_d pour laquelle le mode de propulsion envisagé permet un déplacement en ligne droite dans la direction du vent, sans dérive ou changement de direction. Dans cette configuration, la force propulsive se répartit symétriquement sur les deux parties de la voile séparées par l'axe (Oz) .

4. Établir l'expression de S en fonction de a et α .

On donne la surface S' de la voile située à la droite de la verticale et grisée sur la vue de face de la figure précédente :

$$S' = \frac{a^2}{\frac{2}{\tan \theta} + \frac{2}{\tan \alpha}}$$

5. En déduire que la planche à voile se dirige en ligne droite dans la direction du vent, sans dérive ou changement de direction, à condition que :

$$\tan \theta_d = \frac{\sin \alpha}{2 - \cos \alpha}$$

Déterminer la valeur numérique de θ_d pour une voile d'angle au sommet $\alpha = 60^\circ$.

Le modèle simplifié précédent de collision entre les molécules d'air et la voile ne donne qu'une estimation grossière de l'intensité de la force propulsive qui s'exerce sur la voile. En effet, ce modèle fait totalement abstraction de l'écoulement de l'air autour de la voile. Lors d'essais en soufflerie avec une voile fixe et perpendiculaire au vent, on constate l'existence d'une force propulsive colinéaire à la direction du vent de la forme :

$$\vec{F}_{pro} = \frac{1}{2} \rho_a C_V S v_V^2 \vec{e}_x \quad (1)$$

Le coefficient sans dimension C_V dépend de plusieurs facteurs dont la courbure de la voile, son orientation par rapport à l'écoulement moyen mais aussi, et dans une moindre mesure, de la vitesse du vent. Nous supposons par la suite que la force propulsive est donnée par la relation précédente avec un coefficient C_V indépendant de la vitesse du vent.

Par ailleurs, le déplacement de la planche à la surface de l'eau engendre une force résistante entre la planche et l'eau qui dépend de la vitesse de la planche par rapport à l'eau. Nous supposons pour simplifier que cette force est de direction opposée à la force propulsive, et que son intensité est donnée par une relation inspirée de la relation (1) :

$$\vec{F}_{res} = -\frac{1}{2} \rho_e C_P S_P v_P^2 \vec{e}_x \quad (2)$$

dans laquelle ρ_e désigne la masse volumique de l'eau, S_p la surface de frottement effective entre la planche et l'eau et C_p un coefficient sans dimension.

6. Lorsque la planche à voile se déplace à une vitesse \vec{v}_p dans la direction du vent, quelle est l'expression de la vitesse $\vec{v}_{V\text{ app}}$ du vent par rapport à la voile ? Ce vent s'appelle le *vent apparent* et c'est sa vitesse $\vec{v}_{V\text{ app}}$ qu'il faut prendre en compte dans l'expression (1) de la force propulsive.

7. En supposant un mouvement uniforme de la planche à voile à la vitesse \vec{v}_p , déterminer les deux expressions possibles pour la norme de la vitesse de la planche en fonction de v_V et du coefficient σ défini par :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\rho_e C_p S_p}{\rho_a C_V S}}$$

8. Pour des valeurs courantes des surfaces de la voile et de la planche ainsi que pour celles des coefficients C_p et C_V , on admet que le coefficient σ est numériquement supérieur à 1. En situation de vent arrière, est-il possible pour la planche à voile d'aller plus vite que le vent ?

Remarque : dans la suite du problème, on montrait que lorsque la planche à voile « remonte au vent » (on dit que la planche navigue *au près*), c'est-à-dire dans une situation telle que $\vec{v}_V \cdot \vec{v}_p < 0$ (voir ci-dessous), la vitesse de la planche à voile peut être supérieure à celle du vent.

