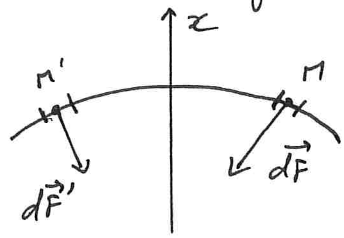
PCSI 1 23-24

# DS n°9

## I Barrage

1. En associant 2 à 2 les éléments de surface symétriques par rapport à l'axe $Oz$, on obtient des forces dont la résultante est selon $Ox$.

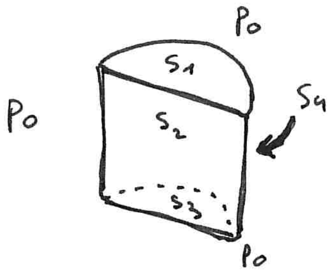



$(\vec{dF}+\vec{dF}')\cdot\vec{e_y}=0.$

or $\|\vec{F}_{air}\| < \|\vec{F}_{eau}\|$ donc :

La résultante horizontale des forces de pression est selon $(-\vec{e_x})$.

2. La pression exercée par l'air est uniforme mais la surface n'est pas plane : on complète par des surfaces planes pour obtenir une surface fermée :



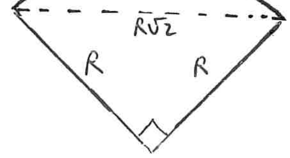

Sur la surface totale fermée : $\vec{F}=\vec{0}$

Donc $\vec{0}=\vec{F}_{S_1}+\vec{F}_{S_2}+\vec{F}_{S_3}+\vec{F}_{S_4}$

avec $\vec{F}_{S_1}=S_1 p_0(-\vec{e_z})$ ; $\vec{F}_{S_3}=S_1 p_0\vec{e_z}$ ; $\vec{F}_{S_2}=S_2 p_0\vec{e_x}$

Donc $\vec{F}_{air\,S_4}=-S_2 p_0\vec{e_x}$ avec $S_2=H\times R\sqrt{2}$ : $\boxed{\vec{F}_{air}=+HRp_0\sqrt{2}\,\vec{e_x}}$

⚠ $\vec{F}_{air}=-\vec{F}_{air\,S_4}$




3. L'équation de la statique des fluides :

$\frac{dp}{dz}=-\rho g$ s'intègre entre la surface $(H)$ et $z$ :

$$p-p_0=-\rho_e g(z-H) \Rightarrow \boxed{p=p_0-\rho_e g(z-H)}$$

R : on a bien $p(\text{surface } z=H)=p_0$ et $p(\text{fond})=p_0+\rho_e gH$.

4. $\boxed{\vec{dF}=p(z)\cdot Rd\theta dz(-\vec{e_r})}$ $\quad \vec{dF}\cdot\vec{e_x}=-p(z)\cdot Rd\theta dz\,\underbrace{\vec{e_r}\cdot\vec{e_x}}_{\cos\theta}$

$$\boxed{dF_x=-p(z)Rd\theta dz\cos\theta}$$

5. $\theta$ varie entre $-\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$ et $z$ entre 0 et H :

$$F_{eau_x} = -R\int_0^H \left[p_0 - \rho_e g(z-H)\right]dz \cdot \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos\theta \, d\theta$$

$$= -R\left[p_0 H - \rho_e g \frac{H^2}{2} + \rho_e g H^2\right] \cdot \underbrace{\left[\sin\theta\right]_{-\pi/4}^{\pi/4}}_{\sqrt{2}}$$

D'où $\boxed{\vec{F}_{eau} = -RHp_0\sqrt{2}\,\vec{e_x} - R\sqrt{2}\rho_e g \frac{H^2}{2}\,\vec{e_x}}$

6. $\vec{F} = \vec{F}_{eau} + \vec{F}_{air} = -R\sqrt{2}\rho_e g \frac{H^2}{2}\,\vec{e_x} \Rightarrow \boxed{F = \frac{R\rho_e g H^2}{\sqrt{2}} = 2{,}3.10^{11}\,N}$

7. Si le rendement est de 100%, que la prise d'eau est en surface et que la turbine est au niveau $z=0$, toute l'énergie potentielle de l'eau est transformée en énergie électrique : $\Delta \mathcal{E} = mgH$.

Or la masse d'eau passant par le barrage par an est $m = 2.10^{10}$ tonnes. $(m = d \times \rho_e \times 1an)$

D'où $P = \frac{mgH}{1an} = \boxed{d\rho_e g H = 1{,}9\ GW = P}$

⚠ exprimer d en $m^3.s^{-1}$ pour l'AN. $(634.m^3.s^{-1})$

Un élément de centrale nucléaire fournit une puissance de l'ordre de 1GW. Les ordres de grandeur sont similaires.

# II Terraformation de Mars

1. Le poids $m\vec{g}$ est une modélisation de l'attraction gravitationnelle : $\vec{F} = -\frac{\mathcal{G} M_m \cdot m}{(R_m+z)^2}\vec{e_r} = m\vec{g}$

donc $g = \frac{\mathcal{G} M_m}{(R_m+z)^2}$ : $\boxed{g_0 = \frac{\mathcal{G} M_m}{R_m^2}}$ $\Longrightarrow$ $\boxed{M_m = \frac{g_0 R_m^2}{\mathcal{G}} = 6{,}4 \cdot 10^{23}\ \text{kg}}$

2. On cherche $z$ tel que : $\frac{\mathcal{G} M_m}{(R_m+z)^2} = 0{,}99\ \frac{\mathcal{G} M_m}{R_m^2}$

soit $(R_m+z)^2 = \frac{1}{0{,}99} R_m^2$. Or $z \ll R_m$ donc $(R_m+z)^2 \simeq R_m^2\left(1+\frac{2z}{R_m}\right)$

D'où $1+\frac{2z}{R_m} = \frac{1}{0{,}99}$ soit $\boxed{z = \frac{R_m}{2}\Big(\underbrace{\frac{1}{0{,}99}-1}_{\simeq 1\%}\Big) = 0{,}005\ R_m = 17\ \text{km}}$

3. On a vu en classe que sur une particule élémentaire de fluide les forces surfaciques de pression sont équivalentes à une force volumique : $\boxed{\vec{f_p} = -\vec{\text{grad}}\,p}$

Syst : une particule élémentaire de fluide au repos

Réf : terrestre considéré galiléen

Forces : pressante $\Rightarrow -\vec{\text{grad}}\,p \cdot dV$

poids : $m\vec{g} = \rho\, dV \vec{g_0}$

PFD à l'équilibre : $\vec{0} = \rho\, dV \vec{g_0} - \vec{\text{grad}}\,p \cdot dV$

D'où $\boxed{\vec{\text{grad}}\,p = \rho \vec{g_0}}$ $\Longleftrightarrow$ $\boxed{\frac{dp}{dz} = \rho\, \vec{g_0}\cdot\vec{e_z}}$

4. Pour un GP : $\rho = \frac{m}{V} = \frac{p M_a}{R T_0}$ d'où $\frac{dp}{dz} = -p \cdot \frac{M_a g_0}{R T_0}$.

On intègre : $p = C_0\, e^{-z/H}$ avec $\boxed{H = \frac{R T_0}{M_a g_0}}$

en $z=0$ : $p = p_0 = C_0$ donc $\boxed{C_0 = p_0}$

5. $M_a = 0{,}96 \times M_{CO_2} + 0{,}02 \times M_{Ar} + 0{,}02 \times M_{N_2}$ $\Rightarrow$

$\boxed{M_a = 43{,}6\ \text{g}\cdot\text{mol}^{-1}}$ $\boxed{H = 10{,}8\ \text{km}.}$

6. $\rho(z) = p(z)\,\frac{M_a}{RT_0} = \frac{p_0 M_a}{RT_0}\, e^{-z/H}$

avec $\boxed{\rho_0 = \frac{p_0 M_a}{RT_0}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\rho(z) = \rho_0\, e^{-z/H}}$

7. La répartition des molécules suit une loi exponentielle. La probabilité pour une particule d'atteindre un niveau d'énergie $\mathcal{E}$ est proportionnel au facteur de Boltzmann : $\exp\left(-\frac{\mathcal{E}}{k_B T}\right)$ dans un système isotherme.

Ici on obtient bien une répartition des particules proportionnelles à :

$$\exp(-z/H) = \exp\left(-\frac{M_a g z}{RT_0}\right) = \exp\left(-\frac{m g z}{k_B T_0}\right) = \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_{pot}}{k_B T_0}\right)$$

8. $H \ll R_m$ donc $\boxed{m_{atm} \simeq \frac{4\pi p_0}{g_0} R_m^2 = 2{,}3 \cdot 10^{16}\ \text{kg} = 23 \cdot 10^{12}\ \text{tonnes}}$

c'est cohérent !

9. Le libre parcours moyen est la distance moyenne parcourue par la particule entre 2 chocs avec une autre particule.

$$\ell_0 = \frac{M_a}{a^2 N_A \cdot p_0 \frac{M_a}{RT_0}} = \frac{RT_0}{a^2 N_A p_0} = \boxed{4{,}8\ \mu m = \ell_0}$$

A pression et température ambiante (sur Terre) la formule donne $\ell_{Terre} = 40\ \text{nm}$. La valeur donnée en cours est un peu plus importante : $100\ \text{nm}$. Sûrement la valeur de $a$ qui est plus faible (la taille de $N_2$ et $O_2$ est inférieure à celle de $CO_2$).

10. On cherche $z$ tel que : $\ell(z) \simeq H$.
car $H$ est la " longueur caractéristique de décroissance de la densité de l'atm ".

$$\frac{Ma}{a^2 N_A \cdot \gamma_0} e^{z/H} = H. \Rightarrow \ell_0 e^{z/H} = H \Rightarrow z = H . \ln \frac{H}{\ell_0}$$

D'où $\boxed{e = H \ln \frac{H}{\ell_0} = 232 \text{ km}}$

C'est très proche de la valeur donnée bien que le modèle soit très simple.
L'expression de $\ell(M)$ donnée est très sensible à la valeur choisie pour $a$ (taille des molécules), le calcul est donc relativement grossier.
De plus $g$ varie notablement sur une telle altitude !

11. Cours de mécanique : particule libre si $\mathcal{E}_m \geq 0$

Or $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{g M_m m}{(R_m + e)} \Rightarrow \boxed{v_{lib} = \sqrt{\frac{2 g M_m}{R_m + e}} = 4,9 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}}$

12. On voit sur le graphique n°2 que la proportion de particules avec $v > v_{lib}$ est très très faible si $M > 30 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$. Donc $CO_2$, $N_2$, $Ar$ peuvent rester ds l'atmosphère.
Par contre $H_2$ et $He$, subissent un très fort effet de Jeans. $H_2O$ y est également sensible.

# III Fonte des inlandsis :



1. $\vec{\Pi} = - m_{\substack{eau \\ déplacée}} \vec{g} = \boxed{-\rho_e V_i \vec{g} = \vec{\Pi}}$

2. La poussée d'Archimède est la résultante de l'ensemble des forces de pression exercées par le fluide (eau + air) qui entoure le système.

3. Syst : le glaçon  Réf : terrestre considéré galiléen

Forces : $\vec{\Pi}$ ; $m_{gl}\vec{g} = \rho_{gl} \cdot (V_e + V_i)\vec{g}$

PFD à l'équilibre : $\vec{\Pi} + m_{gl}\vec{g} = \vec{0}$ donc

$$\rho_e V_i = \rho_{gl}(V_e + V_i) \quad (1) \Rightarrow \boxed{V_e = V_i \cdot \frac{\rho_e - \rho_{gl}}{\rho_{gl}}}$$

A.N : $\boxed{V_e = 8{,}7\,\% \cdot V_i}$

4. . Le niveau initial est $(V_i + V_{eau})/S$  ($S$ = sect° du récipient).

. Le niveau final est $(V_{gl\,fondue} + V_{eau})/S$

Or la masse du glaçon se conserve lors de la fonte :

$$V_{gl\,fondue} = \frac{m_{glaçon}}{\rho_e} = (V_i + V_e)\frac{\rho_{gl}}{\rho_e} \overset{(1)}{=} V_i$$

$\Rightarrow$ Le niveau n'a pas varié.

5. Avec de l'eau salée (1) devient $\rho_{es} V_i' = \rho_{gl}(V_e' + V_i')$

donc $V_{gl\,fondue} = (V_i' + V_e')\dfrac{\rho_{gl}}{\rho_e} = \dfrac{\rho_{es}}{\rho_e} \cdot V_i' > V_i'$

$\Rightarrow$ Le niveau monte !

6. ⚠ $\dfrac{\rho_{es}}{\rho_e} \simeq 1$. L'écart est de 3%. L'effet principal est l'arrivée ds l'eau de l'iceberg qui déplace alors un volume $V_i'$.

La masse des icebergs est beaucoup moins importante que la masse des inlandsis.

7. $T \simeq 1$ an : variation annuelle des précipitations (qui augmentent la masse) et des températures (qui provoquent la fonte donc la perte de masse).

8. Sur 20 ans : $\Delta m = -8000 \cdot 10^9$ . tonnes.

D'où le volume d'eau supplémentaire ds les océans :

$$\Delta V = \frac{-\Delta m}{\rho} = 8 \cdot 10^{12}\ m^3.$$

Ce volume se répartit sur la surface des océans :

$$S = 4\pi R_T^2 \times 70\% = 360 \cdot 10^6\ km^2$$

La variation de niveau est donc : $\boxed{\frac{\Delta V}{S} = 2,2\ cm.}$

Effet non négligeable !

Il faut ajouter la dilatation des océans qui est du m̂ ordre de grandeur. car leur température s'élève.

# IV TIPE "mousse"

1. Il faut que : $\forall t,\ p(0,t)=0$ donc $\cos(\varphi)=0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.

De plus : $\forall t,\ p(L,t)=0$ donc $\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}L+\frac{\pi}{2}\right)=0$

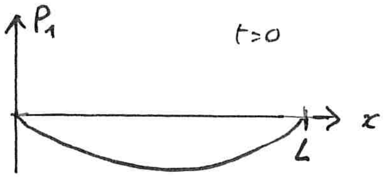
Donc $2\pi\frac{L}{\lambda}+\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}+n\pi \Rightarrow \boxed{\lambda_n = \frac{2L}{n} \text{ avec } n\in\mathbb{N}^*}$

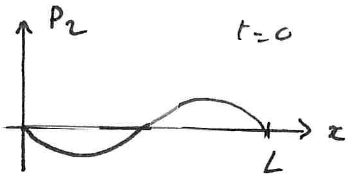
2. Or $\lambda = c/f$ donc $\boxed{f_n = n\cdot\frac{c}{2L}}$

3. Pour $n=1$ : $p_1(x,t) = -p_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos(2\pi f t)$. car $\cos(\alpha+\frac{\pi}{2}) = -\sin\alpha$

Pour $n=2$ : $p_2(x,t) = -p_0 \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\cos(2\pi f t)$

Donc à $t=0$ :




4. mode $n$ : $p_n(x,t) = p_0 \sin\left(n\frac{\pi x}{L}\right)\cos(2\pi f_n t)$

Pour un ventre il faut que $\left|\sin\left(n\frac{\pi x}{L}\right)\right| = 1$

donc $n\frac{\pi x_k}{L} = \frac{\pi}{2}+k\pi \Rightarrow \boxed{x_k = \left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{L}{n}. \text{ avec } k\in[\![0;n-1]\!]}$

$\boxed{d = x_{k+1}-x_k = \frac{L}{n} = \frac{\lambda_n}{2}}$

car $x_k\in[0;L]$.

5. $L = 75$ cm donc $d = 25{,}1$ cm $\Rightarrow n=3$

$d = 18{,}7$ cm $\Rightarrow n=4$

$d = 15{,}1$ cm $\Rightarrow n=5$.

$\boxed{\text{Ils ont observé les modes 3, 4 et 5.}}$

6. $\boxed{c = \lambda\cdot f. \quad (\lambda = 2d)}$ donc : $c_3 = 346\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ ; $c_4 = 340\ \mathrm{m.s^{-1}}$ ; $c_5 = 344\ \mathrm{m\,s^{-1}}$

Pour savoir si elles sont compatibles il faut évaluer les incertitudes sur ces mesures.

7. C'est un monôme : $\frac{u(c)}{c} = \sqrt{\left(\frac{u(d)}{d}\right)^2+\left(\frac{u(f)}{f}\right)^2}$

or $\frac{u(f)}{f} < 0{,}7\%$ et $\frac{u(d)}{d} > 2\%$ donc : $\frac{u(c)}{c} \simeq \frac{u(d)}{d}$

D'où : $\frac{u_{c3}}{c_3} = 2\% \Rightarrow u(c_3) = 7\ m\,s^{-1}$ : $z_3 = \frac{|c_3 - c_{air}|}{u(c_3)} = 0,4$

$\frac{u_{c4}}{c_4} = 3,7\% \Rightarrow u(c_4) = 9\ m\,s^{-1}$ : $z_4 = \frac{|c_4 - c_{air}|}{u(c_4)} = 0,33$

$\frac{u_{c5}}{c_5} = 3,3\% \Rightarrow u(c_5) = 11\ m\,s^{-1}$ : $z_5 = 0,09$.

Toutes ces valeurs sont compatibles avec $c_{air} = 343\ m.s^{-1}$

8. $\boxed{c_m = 2d.f = 150\ m.s^{-1}}$

9. $\boxed{c_{air} = \frac{1}{\sqrt{\gamma_a \chi_{Sa}}} = 343\ m\,s^{-1}}$ $\boxed{c_{eau} = \frac{1}{\sqrt{\gamma_e \chi_{Se}}} = 1430\ m\,s^{-1}.}$

10. $\underline{\gamma_m = x_e \gamma_e + (1-x_e)\gamma_a} \simeq \underline{\underline{\gamma_e x_e}}$ car $\gamma_a \ll \gamma_e$.

11. $\underline{\chi_{Sm}} = x_e \chi_{Se} + (1-x_e)\chi_{Sa} \simeq \underline{\underline{(1-x_e)\chi_{Sa}}}$ car $\chi_{Se} \ll \chi_{Sa}$.

$$\Rightarrow \boxed{c_m = \frac{1}{\sqrt{\gamma_e x_e \cdot (1-x_e)\chi_{Sa}}}}$$

12. $c_m = 150\ m\,s^{-1}$ donc on résoud l'éq. du 2^d degré :

$$-\gamma_e \chi_{Sa} x_e^2 + \gamma_e \chi_{Sa} x_e - \frac{1}{c_m^2} = 0 \Rightarrow x_e^2 - x_e + \frac{1}{c_m^2 \gamma_e \chi_a} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x_e = \frac{1 - \sqrt{1 - 4/c_m^2 \gamma_e \chi_a}}{2} = 0,64\%.}$$

La fraction volumique de l'eau est très faible !