Samedi 25 septembre 2021

DEVOIR SURVEILLE N°1
PHYSIQUE

I. Analyse dimensionnelle d'oscillateurs harmoniques :

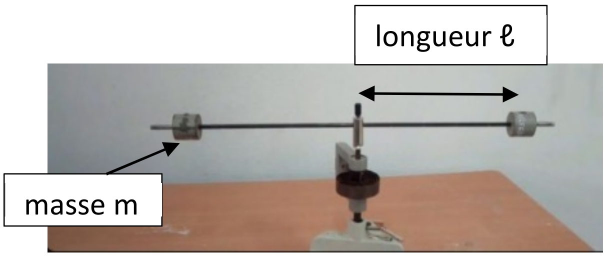
1. L'équation canonique d'un oscillateur harmonique s'écrit :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{éq}$$

En déduire par analyse dimensionnelle, la dimension de la pulsation ω.

2. Un pendule de torsion est constitué d'une tige rigide dont le moment d'inertie est :

$$J = J_0 + m\ell^2$$



L'angle θ de torsion, vérifie l'équation différentielle suivante :

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} + T.\theta = 0$$

où *T* est la constante de torsion du fil en newton.m (N.m) dans le système international.

2.a. Déterminer la dimension de J et de C.

2.b. En déduire un temps caractéristique des oscillations sous la forme d'un monôme de J et *T*.

3. En électricité, un circuit composé d'une capacité C et d'une inductance L se comporte comme un oscillateur harmonique.

On rappelle la loi de Joule : $P_J = R\ i^2$ où P_J est la puissance dissipée par effet Joule et i(t) l'intensité traversant la résistance R.

3.a. Déterminer la dimension d'une résistance R.

Données supplémentaires :

- C est définie par : $i = C\ du/dt$ où u(t) et i(t) sont respectivement une tension et une intensité électrique,
- L intervient dans l'expression de l'énergie magnétique : $E_{mag} = \frac{1}{2} L\ i^2$ où i(t) est une intensité.

3.b. Déterminer l'expression de pulsation d'un circuit LC sous la forme d'un monôme de L et C et d'une constante sans dimension α : $\omega = \alpha\ L^a\ C^b$.

II. Oscillateur harmonique mécanique : étude de diverses situations

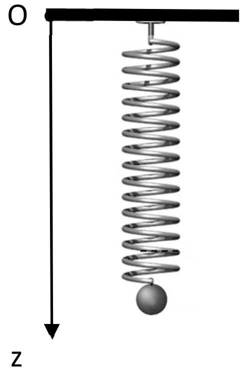
On s'intéresse dans ce problème à l'étude des oscillations d'une masse m = 150 g accrochée à un ou plusieurs ressorts et soumise à diverses conditions initiales.

L'accélération de la pesanteur est notée g et vaut g = 9,8 m.s^{-2}.

A. Situation n°1

1. La masse m est suspendue à un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0.

On prend l'origine de l'axe vertical au niveau du point d'attache du ressort.



1.a. Déterminer l'expression de la longueur du ressort à l'équilibre $z_{éq}$.

1.b. Vérifier que l'influence des paramètres k et m sur l'expression de $z_{éq}$ est cohérente avec l'intuition [une phrase claire par paramètre peut suffire].

2. Lors de l'expérience, la mesure de $z_{éq}$ par un élève en TP donne la valeur $z_{éq} = 21{,}2\ cm$ mais à cause des oscillations résiduelles et du parallaxe il évalue l'intervalle de la mesure à $0{,}3\ cm$.

2.a. Déterminer le résultat de la mesure avec son incertitude-type et écrire correctement le résultat.

2.b. En déduire la valeur de la constante de raideur du ressort sachant que $\ell_0 = 10{,}0\ cm$.

3. La masse m est maintenant mise en mouvement depuis sa position d'équilibre avec une vitesse initiale non nulle : $\vec{v}(t=0) = v_0 \vec{e}_z$ avec $v_0 > 0$.

3.a. Etablir l'équation différentielle que vérifie z(t).

3.b. Donner la forme canonique de cette équation et en déduire la pulsation propre ω_1 de cet oscillateur. A.N. : calculer la pulsation propre ω_1 et la période propre T_1 des oscillations.

3.c. Résoudre cette équation en tenant compte des conditions initiales.

3.d. Pourquoi la pulsation des oscillations est-elle appelée pulsation propre ?

3.e. Déterminer l'expression de l'amplitude z_m des oscillations et faire l'A.N. pour v_0 = 0,3 m.s^{-1}.

3.f. Tracer l'allure de z(t).

3.g. Déterminer l'expression de la position extrême z_{Max} de la masse m au cours du mouvement. A quel instant cette valeur est-elle atteinte pour la première fois au cours du mouvement ? De même avec z_{min}. Quelle est la relation entre z_m, z_{Max} et z_{min} ? Et entre $z_{éq}$, z_{Max} et z_{min} ?

4. La mesure de la période des oscillations est faite en chronométrant la durée Δt de 20 oscillations et en notant $T_1 = \Delta t/20$.

Voici les résultats obtenus par un élève :

0,675	0,668	0,670	0,672	0,680	0,673	0,678	0,671	0,677

4.a. Déterminer le résultat de la mesure avec son incertitude-type et écrire correctement le résultat.

4.b. Les fluctuations sur la valeur de v_0 (qui est difficile à reproduire précisément d'une expérience à l'autre) est-elle la cause des fluctuations sur la mesure de T_1 ? Justifier la réponse.

4.c. Proposer une explication sur les fluctuations de la mesure de T_1 lors de ces 9 relevés. La proposition faite est-elle une erreur systématique ou aléatoire ?

5. Lors de l'expérience, l'élève constate que si v_0 est trop élevée, la masse m ne reste pas accrochée au ressort.

On pourra montrer en cours de mécanique que la condition de non-décollage est liée à l'accélération subie par la masse m qui ne doit pas devenir supérieure à une valeur critique $a_{crit} = 10\ m.s^{-2}$.

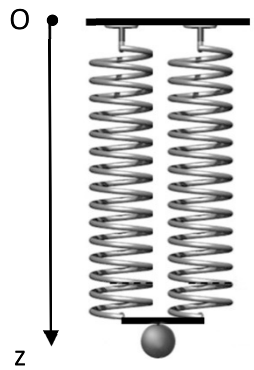
5.a. Déterminer l'expression de l'accélération $\ddot{z}(t)$ au cours du mouvement.

5.b. Déterminer la valeur maximale de $\ddot{z}(t)$ au cours du mouvement ainsi que l'instant où cette valeur est atteinte pour la première fois. En déduire la condition sur v_0 pour que la masse m reste accrochée au ressort. Faire l'A.N.

B. Situation n°2

6. La masse m est suspendue à deux ressorts identiques de constantes de raideur k et de longueurs à vide ℓ_0. La tige qui relie les deux ressorts et la masse m n'a pas de masse significative et on peut donc traiter l'exercice comme si les deux ressorts agissaient directement sur la masse m.

On prend l'origine de l'axe vertical au niveau du point d'attache des ressorts.

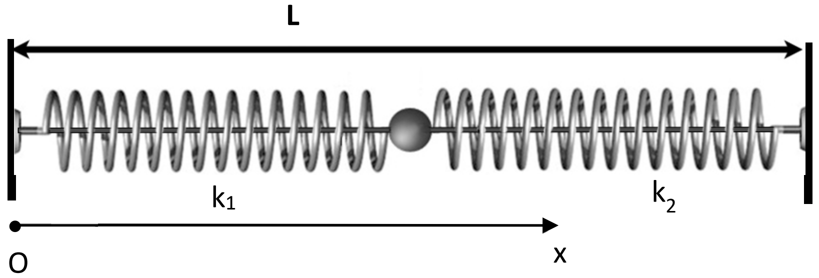


6.a. Déterminer la nouvelle expression de la pulsation des oscillations ω_2.

6.b. Quelle devrait être la constante de raideur $k_{éq}$ d'un unique ressort pour qu'il soit équivalent à cette association de deux ressorts ? [« équivalent » signifie que le comportement de la masse m est identique dans les deux cas : attachée aux deux ressorts présentés ou attachée à l'unique ressort équivalent].

C. Situation n°3

7. Lors de cette nouvelle expérience la masse m peut coulisser sans frottement sur une tige horizontale et est accrochée à deux ressorts de mêmes longueurs à vide ℓ_0 mais de constantes de raideur différentes : k_1 et k_2.



La position de la masse m est repérée sur l'axe horizontal Ox.

7.a. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par x(t).

7.b. En déduire la pulsation propre ω_3 de cet oscillateur et la position d'équilibre $x_{éq}$.

7.c. L'expression de $x_{éq}$ est-elle cohérente avec l'intuition dans les cas où $k_1 = k_2$, $k_1 >> k_2$ et $k_1 << k_2$?

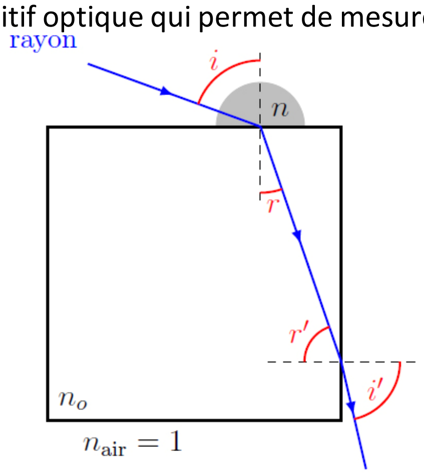
7.d. Quelle est la constante de raideur du ressort équivalent à cette association ?

III. Optique : réfractomètre de Pulfrich (d'après Agrégation 2021) **:**

Le réfractomètre de Pulfrich (voir figure ci-dessous) est un dispositif optique qui permet de mesurer l'indice de réfraction n d'un liquide.

Il est composé d'un cube de verre, d'indice de réfraction n_0 connu, sur lequel on dépose une goutte supposée hémisphérique [en forme de demi-sphère] du liquide d'indice à déterminer.

Les angles sont non orientés et compris entre 0 et π/2 rad.



Lorsque de la lumière issue de la goutte liquide pénètre dans le bloc par la face horizontale, l'observation des rayons émergents du cube permet d'accéder à l'indice n cherché.

1. Rappeler les lois de Snell-Descartes pour la réflexion et pour la réfraction.

2. Définir le phénomène de réflexion totale et établir les conditions pour l'observer.

3. Pourquoi le rayon incident n'est-il pas dévié à l'entrée de la goutte (sur le dioptre air/liquide) ?

4. Exprimer les angles r, puis i, en fonction de r'.

5. En déduire qu'un rayon ne peut sortir du réfractomètre que si l'angle d'incidence i est supérieur ou inférieur à une valeur critique i_{cr} définie par :

$$\sin i_{cr} = \frac{1}{n}\sqrt{n_0^2 - 1}$$

Rappel : $\sin(\arccos x) = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Préciser si i doit être inférieur ou supérieur à i_{cr}.

6. Quelle contrainte est imposée sur l'indice n_0 du cube en verre vis-à-vis de l'indice n pour que i_{cr} existe et donc que le rayon puisse sortir du cube ?

Pour la suite on suppose que la condition précédente est vérifiée : le rayon émergent existe.

7. Montrer que : $\sin i' = \sqrt{n_0^2 - n^2 \sin^2 i}$.

8. En déduire la valeur de l'angle d'incidence i pour laquelle l'angle d'émergence i' est minimal. Quel est le nom de cette incidence ?

9. En déduire que l'indice n du liquide satisfait la relation suivante où i'_m est l'angle d'émergence minimum :

$$n^2 = n_0^2 - \sin^2 i'_m$$

La goutte est éclairée avec une lumière diffuse et un opérateur relève l'angle $i'_m = 67°51'$ avec une incertitude-type $u(i'_m)$.

10. Déterminer l'indice n du liquide sachant que le cube est en verre d'indice optique $n_0 = 1{,}6231$. Le liquide étudié est-il une solution aqueuse ?

11. L'opérateur repère le zéro du goniomètre [équivalent à un rapporteur] puis mesure i'_m.
Les graduations du goniomètre sont espacées de 5 minutes d'arc. En déduire la valeur de $u(i'_m)$ en radian.

12. La mesure est effectuée à l'aide d'une source de lumière monochromatique de longueur d'onde λ=589nm. Est-il possible d'utiliser une source polychromatique ? [Justifier en quelques mots]

Complément : propagation dans un milieu inhomogène et application à la lentille de Lüneberg

Il est possible d'observer un mirage lorsqu'une voiture roule sur une route par une belle journée d'été. L'air près du sol est plus chaud que celui en altitude et le milieu étant inhomogène la lumière ne se propage pas en ligne droite.

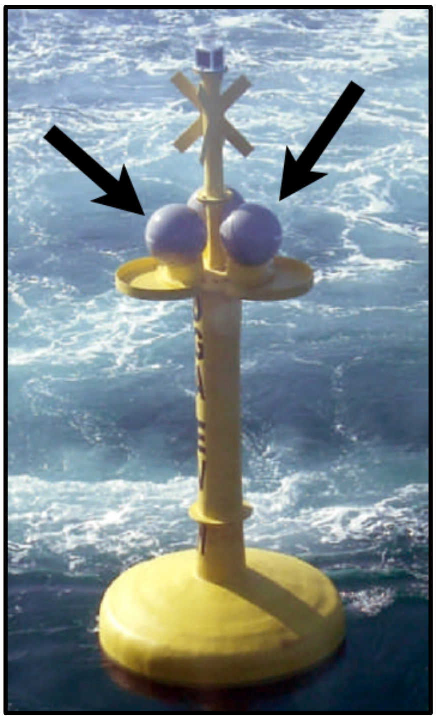
13. Citer le principe qui caractérise la trajectoire des rayons lumineux dans les milieux inhomogènes.

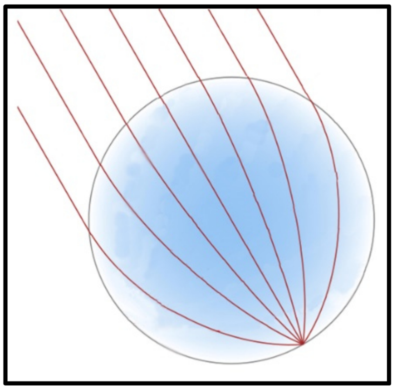
14. L'indice optique près du sol est-il plus ou moins élevé que celui en altitude ? Faire un schéma montrant la trajectoire d'un rayon lumineux émis par un nuage au loin et qui est vu sous la forme d'un mirage par le chauffeur de la voiture.

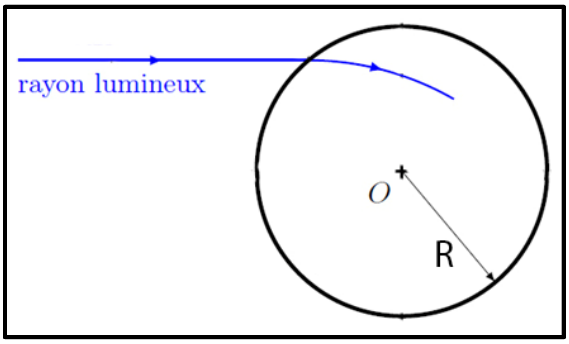
Une lentille de Lüneberg est une lentille en forme de boule souvent utilisée dans le domaine des radars ou du balisage (aérien et maritime) grâce aux propriétés de focalisation particulières des ondes électromagnétiques qui la traversent.

Nous allons modéliser une lentille de ce type par une boule de rayon R usinée de telle sorte que son indice optique varie selon la distance r au centre de la lentille : $n(r)$.

L'objectif de cette lentille de Lüneberg est de faire converger un faisceau de lumière parallèle en un point unique sur sa surface, sans aucune aberration géométrique.







15. En s'inspirant de la figure du mirage précédente, déterminer si n(r) est une fonction croissante ou décroissante de r.

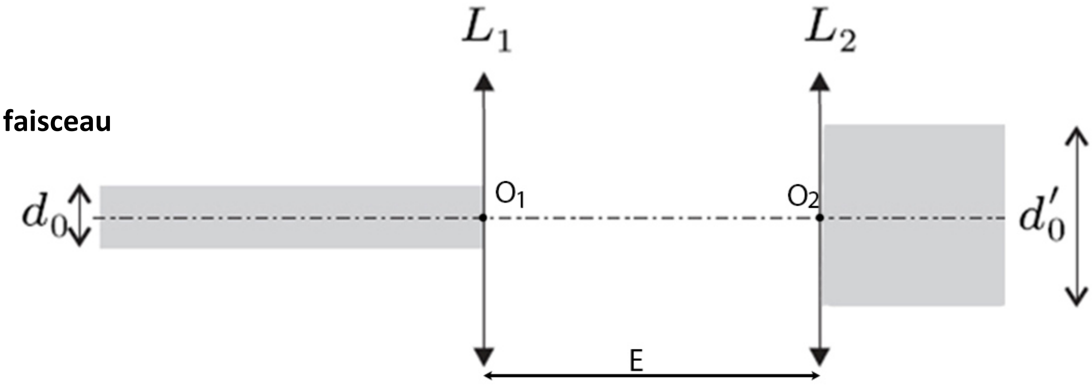
16. Définir les aberrations géométriques. Citer d'autres systèmes optiques soumis aux aberrations géométriques. Comment les élimine-t-on en général ? Quels sont les inconvénients de ces conditions de travail ?

IV. Elargisseur et diviseur de faisceau (d'après Mines-Ponts PSI 2021) **:**

Un **élargisseur de faisceau**, présenté sur la figure ci-dessous, est composé de deux lentilles convergentes de distances focales image f_1' et f_2' distantes de $E = O_1O_2$.

Il transforme un faisceau cylindrique laser de largeur d_0, en un autre de largeur $d_0' > d_0$.

élargisseur de faisceau



1. Pourquoi peut-on dire que l'élargisseur de faisceau est un système afocal ?

2. Expliquer pourquoi il faut que $\mathbf{F_1' = F_2}$ puis reproduire le schéma de l'élargisseur de faisceau et positionner les foyers des deux lentilles (F_1, F_1', F_2 et F_2').

3. Déterminer géométriquement la relation entre d_0, d_0', f_1' et f_2'. Pour que la largeur d_0' soit supérieur à d_0, quelle condition doivent vérifier f_1' et f_2' ?

4. Exprimer l'encombrement $E = O_1O_2$ de ce dispositif, défini comme sa longueur sur l'axe optique, en fonction de f_1', d_0 et d_0'.

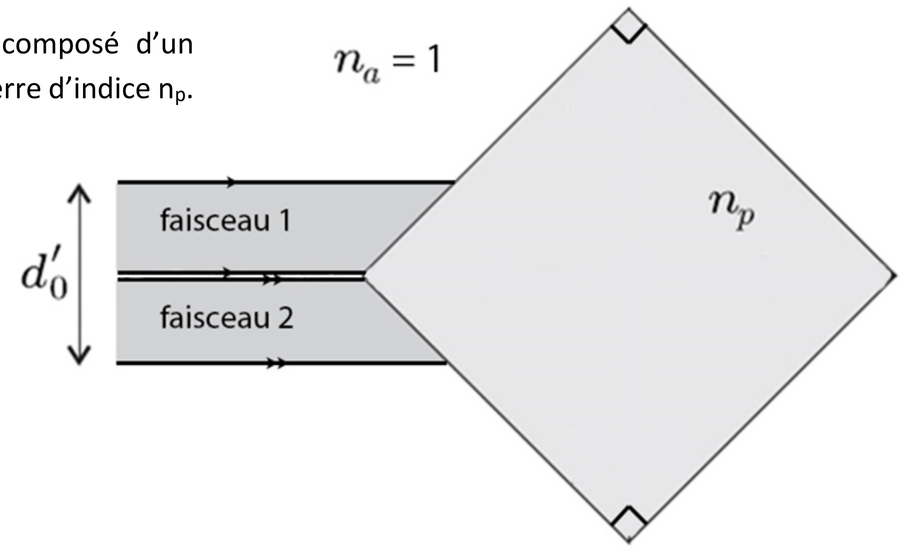
5. On place un objet lumineux A à la distance $f_1'/2$ en avant de L_1. Déterminer par construction l'image A' par l'élargisseur de faisceau en complétant la figure 1 de l'annexe. [À rendre avec la copie !].

6. Proposer un autre schéma d'élargisseur de faisceau [qui assure toujours qu'un faisceau incident cylindrique de rayon d_0 donne un faisceau de sortie cylindrique de rayon d_0'] composé d'une lentille divergente et d'une lentille convergente. Indiquer clairement sur un schéma l'ordre dans lequel il faut placer ces deux lentilles et la position de leurs foyers objet et image.

Le faisceau de largeur d_0' arrive sur un **diviseur de faisceau** qui sépare le faisceau indicent (de largeur d_0') en deux faisceaux parallèles de largeur identiques d_0'' qui **ne se recouvrent pas** et dont les axes sont distants de D.

Ce diviseur de faisceau est composé d'un prisme de section carrée en verre d'indice n_p.

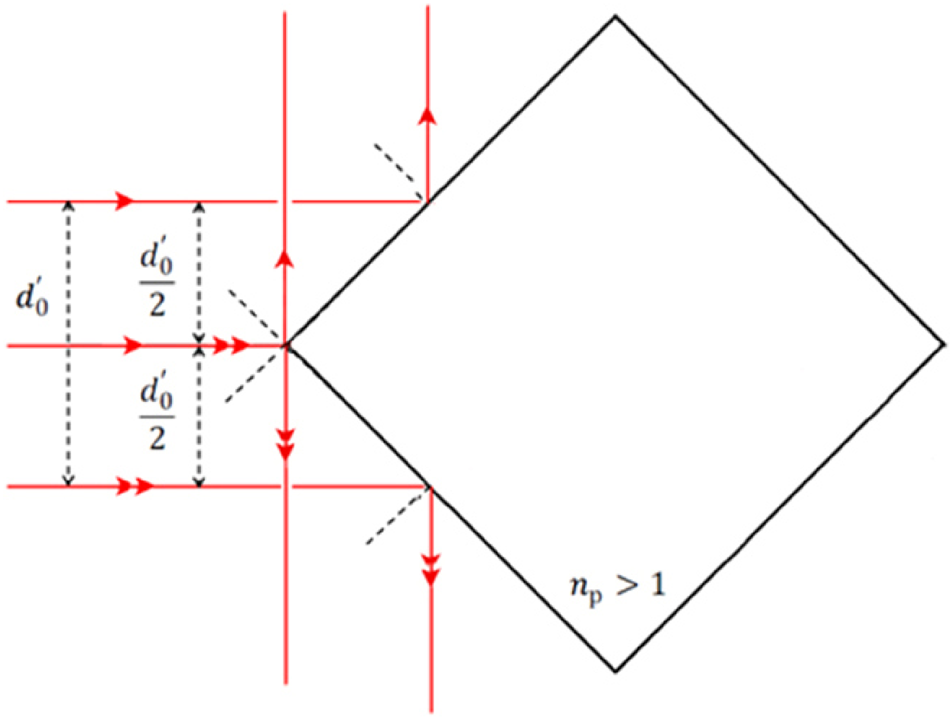
diviseur de faisceau



7. Compléter les différents rayons incidents de la figure 2 en annexe afin d'expliquer le fonctionnement du séparateur de faisceau : on y indiquera d_0', d_0'' et D.

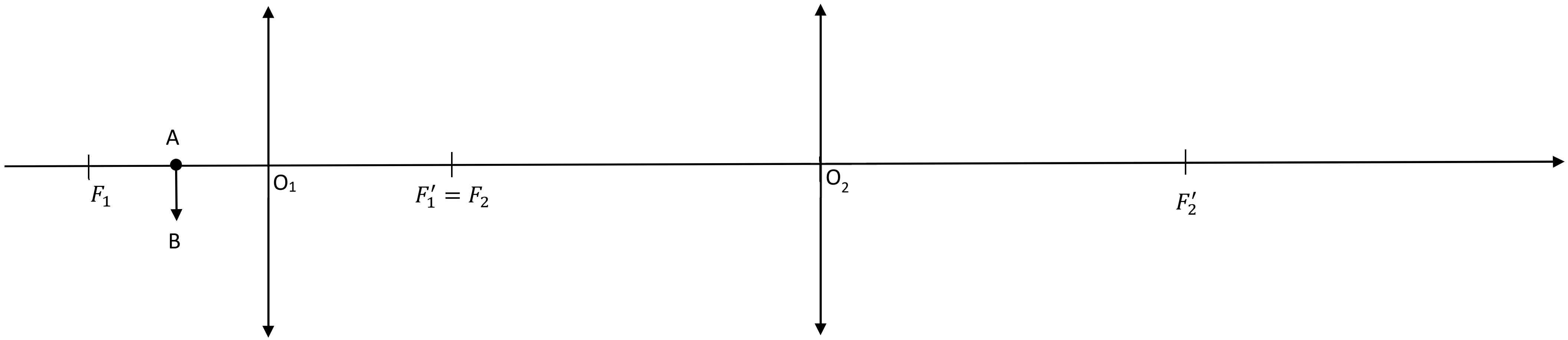
8. Expliquer pourquoi les faisceaux de sortie sont parallèles à celui d'entrée.

9. Est-il possible qu'il y ait réflexion totale à l'entrée du diviseur de faisceau et que l'on obtienne deux faisceaux parallèles mais de directions opposées [comme sur le schéma ci-dessous] ? [Justifier la réponse].

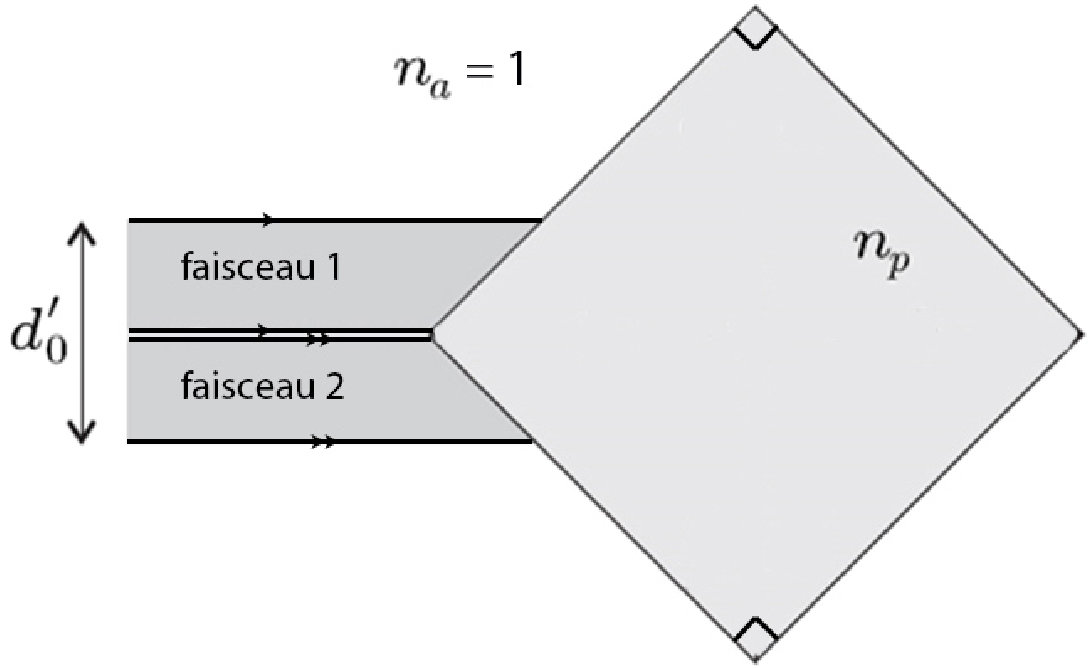


Feuille annexe à rendre avec la copie

<u>Figure 1</u> :



<u>Figure 2</u> :



RAPPELS SUR LES INCERTITUDES

Écriture d'un résultat avec incertitude :

$$X = x \pm u(X) \ (la\ grandeur\ après\ le\ symbole \pm est\ une\ incertitude\_type)$$

ou

$$X = x\ ; u(X)$$

Attention à la cohérence des **chiffres significatifs** et à ne pas oublier **l'unité**.

Incertitude-type de type A (répétition N fois de la mesure) :

Le menu STAT de la calculatrice donne la moyenne <x> et l'écart-type Sx des N mesures.

Un point est aberrant s'il n'est pas dans l'intervalle $[< x > -2S_X\ ; < x > +2S_X]$.

L'incertitude-type de la mesure est donnée par : $\boldsymbol{u_A = S_X/\sqrt{N}}$.

Incertitude-type de type B (mesure unique) :

On détermine le **demi-intervalle** acceptable pour la mesure, noté ***a*** **:**

- pour une lecture sur une **échelle graduée** (règle, thermomètre gradué, palmer…) :

$$\boldsymbol{a = 1/2\ graduation}$$

- pour un **appareil de mesure** à affichage digital (voltmètre, thermomètre électronique, …) :

a est appelé **précision** et est donné par la **notice**

- pour un **composant** (résistances, condensateurs, bobines, …) :

a est appelé **tolérance** et est donné par le **fabricant**

- pour une **évaluation directe par l'utilisateur** entre x_1 et x_2 :

$$\boldsymbol{x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad et\ le\ demi - intervalle\ a = \frac{x_2 - x_1}{2}}$$

Si la mesure est à **lecture double :** $\boldsymbol{a}$ **est multiplié par** $\boldsymbol{\sqrt{2}}$

L'incertitude-type de la mesure est donnée par : $\boldsymbol{u_B = a/\sqrt{3}}$

Comparaison d'une mesure : x_1 ; $u(x_1)$

avec une **valeur de référence** x_{ref}	avec une **autre mesure :** x_2 ; $u(x_2)$
On détermine l'**écart normalisé** ou **z-score :**	
$\boldsymbol{z = \frac{\lvert x_1 - x_{ref}\rvert}{u(x_1)}}$	$\boldsymbol{z = \frac{\lvert x_1 - x_2\rvert}{\sqrt{u(x_1)^2 + u(x_2)^2}}}$
Si z<2, on considère qu'il y a **compatibilité** **Si z ≥ 2**, on considère qu'il y a **incompatibilité** et il faut **chercher la cause**.	