PCSI 1 21-22

DS n° 1.

I. Analyse dimensionnelle d'osc. harmoniques

1. $[\ddot{x}] = \left[\frac{d^2x}{dt^2}\right] = \frac{L}{T^2}$ et $[\ddot{x}] = [\omega_0]^2[x]$

D'où $\boxed{[\omega_0] = T^{-1}}$

2.a. C est en N.m donc $\boxed{\begin{aligned}[C] &= [\text{force}].L \\ &= M.L^2.T^{-2}\end{aligned}}$

$\boxed{[J] = [m\ell^2] = M.L^2}$

2.b Cherchons $\tau = J^a.C^b$.

On a donc $T = M^aL^{2a}.M^b.L^{2b}.T^{-2b}$

D'où : $\begin{cases} 1 = -2b \\ 0 = a+b \\ 0 = 2a+2b \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} b &= -\frac{1}{2} \\ a &= -b = \frac{1}{2}\end{aligned} \Rightarrow \boxed{\tau = \sqrt{\frac{J}{C}}}$

3. a déterminons d'abord la dimension de R :

$[\text{Puissance}] = [R].I^2 \Rightarrow \boxed{[R] = M.L^2.T^{-3}.I^{-2}}$

3.b $[\text{Energie}] = [L].I^2 \Rightarrow \boxed{[L] = M\,L^2T^{-2}.I^{-2}}$

$I = [C].\frac{[\text{Tension}]}{T} = [C].\frac{[R].I}{T} \Rightarrow [C] = T.[R]^{-1}$

donc $\boxed{[C] = M^{-1}.L^{-2}.T^4.I^2}$

$\omega = \alpha\, L^a C^b$ donne :

$T^{-1} = M^{a-b}.L^{2a-2b}.T^{-2a+4b}.I^{-2a+2b}$

$\Rightarrow \begin{cases} -1 = -2a+4b \\ 0 = a-b \\ 0 = 2a-2b \\ 0 = -2a+2b \end{cases}$ redondance !

D'où $a = b$ et $-1 = 2b$

Donc $a = b = -1/2$

$\boxed{\omega = \alpha.\frac{1}{\sqrt{LC}}}$

II Oscillateur harmonique mécanique

1.a. Système : masse m   Réf : terrestre considéré galiléen

Forces : $m\vec{g}$, $\vec{F} = -k(z-\ell_0)\vec{e_z}$ d'après la loi de Hooke

PFD à l'équilibre : $m\vec{g} + \vec{F} = \vec{0}$.

Projetons selon $\vec{e_z}$: $mg - k(z_{éq} - \ell_0) = 0$

donc $\boxed{z_{éq} = \ell_0 + \frac{mg}{k}}$ R : $z_{éq}$ est bien > à ℓ_0 (le ressort est étiré).

1.b. Si m augmente il est logique que $z_{éq}$ augmente.

Si k — il est — — $z_{éq}$ se rapproche de ℓ_0.

2.a. $a = \frac{1}{2}$ intervalle $= \frac{0,3}{2} = 0,15$ cm

or $u = \frac{a}{\sqrt{3}} = 0,087$ cm $\simeq 0,09$ cm $\Rightarrow \boxed{z_{éq} = (21,20 \pm 0,09)\text{ cm}}$

2.b. $\boxed{k = \frac{mg}{z_{éq} - \ell_0} = 13,1 \text{ N.m}^{-1}}$

3.a même système : PFD au cours du mouvement

$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}$ donne, selon $\vec{e_z}$: $\boxed{m\ddot{z} = mg - k(z - \ell_0)}$

3.b C'est un osc. harmonique et la forme canonique est : $\ddot{z} + \omega_1^2 z = \omega_1^2 z_{éq}$.

Par identification : $\boxed{\omega_1^2 = \frac{k}{m}}$ et $\omega_1^2 z_{éq} = g + \frac{k\ell_0}{m}$

$\Leftrightarrow z_{éq} = \frac{mg}{k} + \ell_0$ cohérent avec 1.

$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\boxed{T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 0,67 \text{ s.}}$

$\boxed{\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 9,35 \text{ rad.s}^{-1}}$

3.c La résolution donne : $z(t) = z_{éq} + A\cos(\omega_1 t) + B\sin(\omega_1 t)$

Les CI sont $\begin{cases} z(t=0) = z_{éq} \\ \dot{z}(t=0) = v_0 \end{cases}$

donc $z_{éq} + A = z_{éq}$ et $+B\omega_1 = v_0$

(car $\dot{z}(t) = -\omega_1 A \sin\omega_1 t + \omega_1 B \cos\omega_1 t$)

Finalement $A = 0$ et $B = \frac{v_0}{\omega_1}$

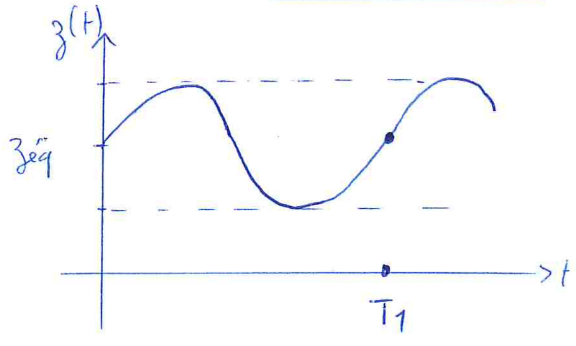
$$\boxed{z(t) = z_{éq} + \frac{v_0}{\omega_1}\sin(\omega_1 t)}$$

3.d. La pulsation ω_1 ne dépend pas de l'amplitude des oscillations : quelle que soit l'excitation de l'osc. harmonique il oscille avec la même période : c'est l'isochronisme

3.e. $z(t) = z_{éq} + \frac{v_0}{\omega_1}\cos(\omega_1 t - \frac{\pi}{2}) = z_{éq} + z_m \cos(\omega_1 t + \varphi)$

donc l'amplitude des oscillations est $\boxed{z_m = \frac{v_0}{\omega_1}}$.

AN. $\boxed{z_m = 3{,}2 \text{ cm}}$

3.f 

car $\varphi = -\pi/2 \Leftrightarrow$ retard par rapport à $\cos(\omega_1 t)$

3.g. $z_{Max} = z_{éq} + \frac{v_0}{\omega_1}$ (atteint lorsque $\sin\omega_1 t = 1$)

$z_{min} = z_{éq} - \frac{v_0}{\omega_1}$ (— — — $= -1$)

$$\boxed{z_m = \frac{z_{Max} - z_{min}}{2}} \qquad \boxed{z_{éq} = \frac{z_{Max} + z_{min}}{2}}$$

4.a. Le menu STAT donne la moyenne : $\langle T \rangle = 0{,}67377$ s et $S_x = 0{,}0040$ s.

Tous les points sont dans l'intervalle $[m \pm 2 S_x]$ donc il n'y a pas de points aberrants.

$$u(T) = \frac{S_x}{\sqrt{9}} = 0{,}00133 \text{ s} \simeq 1{,}3 \text{ ms}$$

Finalement $\boxed{T = (673{,}8 \pm 1{,}3) \text{ ms}}$ (ce qui suit $\pm$ est une incertitude-type).

4.b. Les fluctuations sur v_0 n'ont pas d'influence sur la valeur de T_1 car il y a isochronisme. (T_1 ne dépend pas des CI).

4.c. Les fluctuations proviennent des temps de déclenchement du chronomètre qui fluctuent d'une mesure à l'autre. Ce sont des erreurs aléatoires.

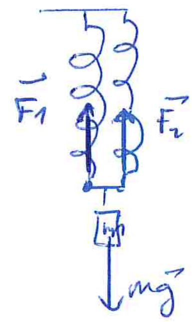
5.a. $$\ddot{z}(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(v_0 \cos \omega_1 t) = \boxed{-v_0 \omega_1 \sin \omega_1 t = \ddot{z}(t)}$$

5.b. La valeur maximale de $\ddot{z}$ est $v_0 \omega_1$ (lorsque $\sin \omega_1 t = -1$). Pas de décollage si $v_0 \omega_1 < a_{crit}$

$$\Rightarrow \boxed{v_0 < \frac{a_{crit}}{\omega_1} = 1{,}07 \text{ m s}^{-1}}$$

6.a. Syst : masse m Ref : t.c.g

Forces : $m\vec{g}$, $\vec{F_1} = -k(z - \ell_0)\vec{e_z}$ $\vec{F_2} = \vec{F_1}$



PFD selon $\vec{e_z}$: $m\ddot{z} = mg - 2k(z - \ell_0)$

$$\ddot{z} + \frac{2k}{m} z = g + \frac{2k}{m}\ell_0.$$

or $\ddot{z} + \omega_2^2 z = \omega_2^2 z_{éq_2}$; D'où : $\boxed{\omega_2^2 = \frac{2k}{m}}$

6.b. Le ressort équivalent exercera une force :

$$\vec{F} = -k_{éq}(z - l_0)\vec{e_z}$$ qui doit être égale à $\vec{F_1} + \vec{F_2}$

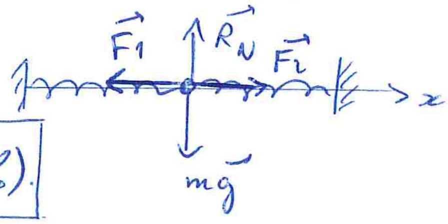
Donc $\boxed{k_{éq} = 2k}$

Cette association de ressort (en parallèle) permet d'augmenter la raideur ($k_{éq} > k$).

7.a. Syst : masse m Réf : t.c.g.

Forces : $m\vec{g}$, $\vec{R_N}$, $\vec{F_1} = -k_1(x - l_0)\vec{e_x}$; $\vec{F_2} = -k_2(L - x - l_0)(-\vec{e_x})$

PFD selon $\vec{e_x}$:



$$\boxed{m\ddot{x} = -k_1(x - l_0) + k_2(L - x - l_0)}$$

7.b par identification avec l'équation canonique :

$$\ddot{x} + \frac{k_1 + k_2}{m}x = \frac{k_1}{m}l_0 + \frac{k_2}{m}(L - l_0)$$

$$= \frac{k_1 + k_2}{m}\left(\frac{k_1}{k_1 + k_2}l_0 + \frac{k_2}{k_1 + k_2}L - \frac{k_2}{k_1 + k_2}l_0\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_3 = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}} \quad \boxed{x_{éq} = \frac{(k_1 - k_2)l_0 + k_2 L}{k_1 + k_2}}$$

7.c. On remarque que si $k_1 = k_2$, $x_{éq} = \frac{L}{2}$ ce qui est cohérent.

. Si $k_1 \gg k_2$: $x_{éq} \rightarrow l_0$: le ressort 1 étant très rigide c'est cohérent.

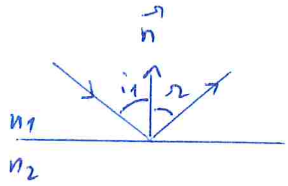
. Si $k_2 \gg k_1$: $x_{éq} \rightarrow L - l_0$: — — 2 — — — — — .

7.d. De m̂ qu'en 6 b, on obtient

$$\boxed{k_{éq} = k_1 + k_2}$$

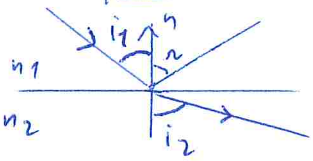
III Réfractomètre de Pulfrich

1. • Loi de la réflexion avec un schéma :



- le rayon réfléchi existe tjs.
- – – – est dans le plan d'incidence
- – – – est le symétrique du rayon incident par rapport à la normale au dioptre : $\boxed{r = i_1}$.

• Loi de la réfraction avec un schéma :



- lorsque le rayon réfracté existe :
  - il est dans le plan d'incidence
  - il vérifie $\boxed{n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2}$

2. S'il n'existe pas de solution à l'équation $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ alors le rayon réfracté n'existe pas et il y a réflexion totale de l'énergie lumineuse dans le rayon réfléchi. Il faut donc que $n_1 > n_2$ et $i_1 > \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$ (ce qui conduit à $\frac{n_1}{n_2} \sin i_1 > 1$).

3. A l'entrée de la goutte le rayon incident est dirigé vers le centre de la goutte et arrive donc sous incidence normale : il n'est pas dévié [si $i_1 = 0$ alors $i_2 = 0$].

4. angles complémentaires : $\boxed{r = \frac{\pi}{2} - r'}$.

loi de la réfraction : $n \sin i = n_0 \sin r$
$= n_0 \cos r'$

donc $\boxed{i = \arcsin\left(\frac{n_0 \cos r'}{n}\right)}$

5. Pour que le rayon sorte il faut que $\frac{n_0 \sin r'}{n_{air}} \leq 1$

donc que : $\sin r' \leq \frac{1}{n_0}$ car $n_{air} = 1$.

d'où : $r' \leq \arcsin \frac{1}{n_0}$

et : $i \geq \arcsin\left(\frac{n_0 \cos(\arcsin \frac{1}{n_0})}{n} \right)$

⚠ chg^t du sens de l'inégalité car $\cos x$ est décroissante pour $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$.

Finalement : $\boxed{\sin i \geq \frac{n_0}{n} \sqrt{1 - \frac{1}{n_0^2}} = \frac{1}{n} \sqrt{n_0^2 - 1}}$

On retrouve la condition proposée : $i \geq i_m$ tel que $\sin i_m = \frac{1}{n} \sqrt{n_0^2 - 1}$

6. Pour que i_m existe il faut que $\frac{1}{n} \sqrt{n_0^2 - 1} \leq 1$

donc que $\boxed{n_0^2 - 1 \leq n^2}$

7. On a alors : $n \sin i = n_0 \sin r$ et $n_0 \sin r' = \sin i'$

D'où : $\sin i' = n_0 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{n \sin i}{n_0}\right)\right)$ car $r' = \frac{\pi}{2} - r$

$= n_0 \cos\left(\arcsin\left(\frac{n \sin i}{n_0}\right)\right)$

$\boxed{\sin i' = n_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{n^2}{n_0^2} \sin^2 i} = \sqrt{n_0^2 - n^2 \sin^2 i}}$

8. La valeur minimale de i' (donc de $\sin i'$) est obtenue pour $\sin i$ maximal.

Or le max de $\sin i$ est 1 pour $i = \frac{\pi}{2}$ rad (incidence rasante). $\boxed{\text{Pour } i = \frac{\pi}{2}, \ i' \text{ est minimal}}$

9. avec $\sin i = 1$, on obtient : $\sin i'_{min} = \sqrt{n_0^2 - n^2}$.

D'où : $\boxed{n^2 = n_0^2 - \sin^2 i'_{min}}$

10. AN: $n^2 = n_0^2 - \sin^2 i'_m$ avec $i'_m = 67°51'$
$= 67{,}85°$

$\boxed{n = 1{,}3329}$

Les solutions aqueuses ont un indice proche de $n_{eau} = 1{,}33$. Il s'agit donc ~~sûrement~~ d'une solution aqueuse.

11. C'est une mesure double car il faut d'abord repérer l'angle nul : $a = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}$ graduation.

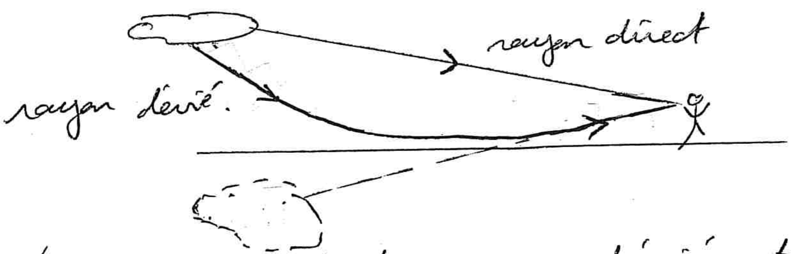
$a = \frac{5'}{2} \times \sqrt{2} = 3{,}5' = \frac{3{,}5}{60} \times \frac{\pi}{180} = 1{,}0 \cdot 10^{-3}$ rad.

$\boxed{u(i'_m) = \frac{a}{\sqrt{3}} = 6 \times 10^{-4} \text{ rad}}$

12. Une source polychromatique ne convient pas car le verre et le liquide sont des milieux dispersifs (n dépend de λ). Il y aurait alors divers angles i'_m selon la longueur d'onde choisie.

13. Principe de Fermat : la lumière emprunte le trajet dont le tps de parcours est minimal.

14. près du sol l'air est + chaud donc − dense et son indice est donc + faible (plus proche de celui du vide $n_{vide} = 1$) ($n_{sol} < n_{altitude}$)



15. La concavité du rayon dévié est tournée vers les indices les + élevés (vers le haut). Dans la sphère il faut donc l'indice le + élevé au centre.

$\boxed{n(r) \text{ est une fonction décroissante de } r}$

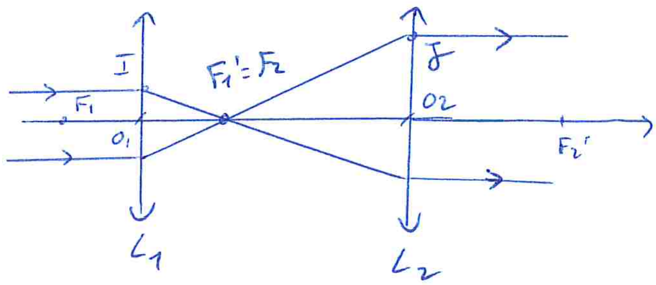
16. cf. cours (conditions de Gauss)

IV Elargisseur et diviseur de faisceau

1. C'est un système afocal car un objet à l'∞ sur l'axe (faisceau incident) donne une image à l'∞ sur l'axe (faisceau émergent).
Les foyers F et F' sont donc à l'∞.

2. $A_\infty \xrightarrow{L_1} A_i \xrightarrow{L_2} A'_\infty$

Or A_∞ donne par L_1 une image en F_1' : $A_i = F_1'$
et A'_∞ impose un antécédent par L_2 en F_2 : $A_i = F_2$
D'où $\boxed{F_1' = F_2}$

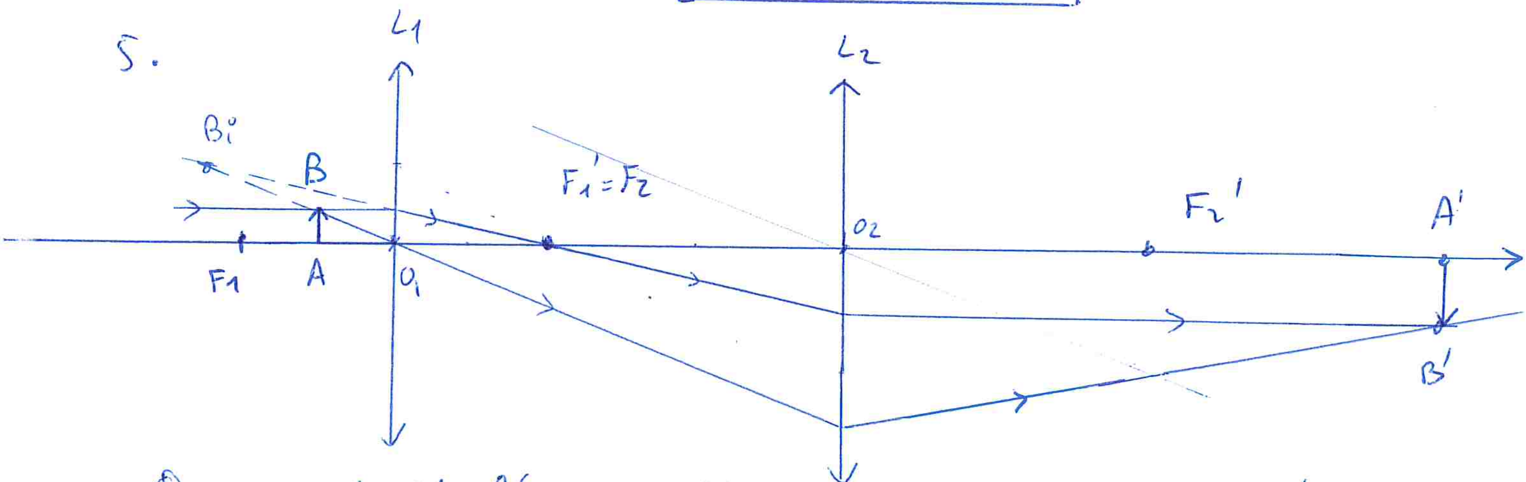


3. Thalès donne : $\dfrac{O_2J}{O_1I} = \dfrac{F_2O_2}{O_1F_1'} \Rightarrow \dfrac{d_0'/2}{d_0/2} = \dfrac{f_2'}{f_1'}$: $\boxed{\dfrac{d_0'}{d_0} = \dfrac{f_2'}{f_1'}}$

Pour avoir $d_0' > d_0$, il faut $\boxed{f_2' > f_1'}$

4. $E = O_1O_2 = f_1' + f_2' = \boxed{f_1'\left(1 + \dfrac{d_0'}{d_0}\right) = E}$

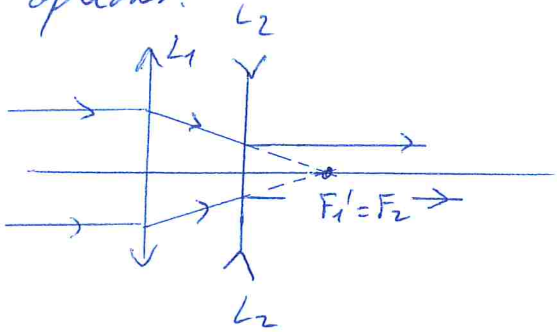
5.



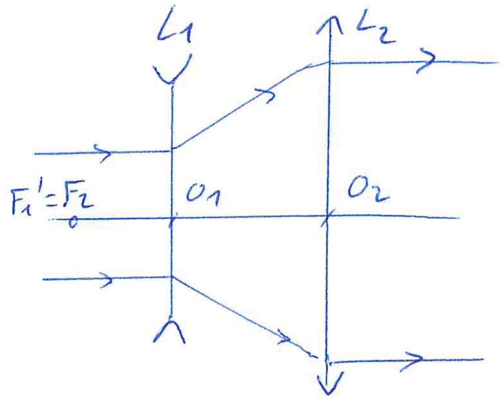
On construit l'image d'un objet AB $\perp$ à Δ : A'B'
Par aplanétisme on déduit A' sur l'axe Δ.

6. Il faut toujours un système afocal avec $\boxed{F_1' = F_2}$

2 options :



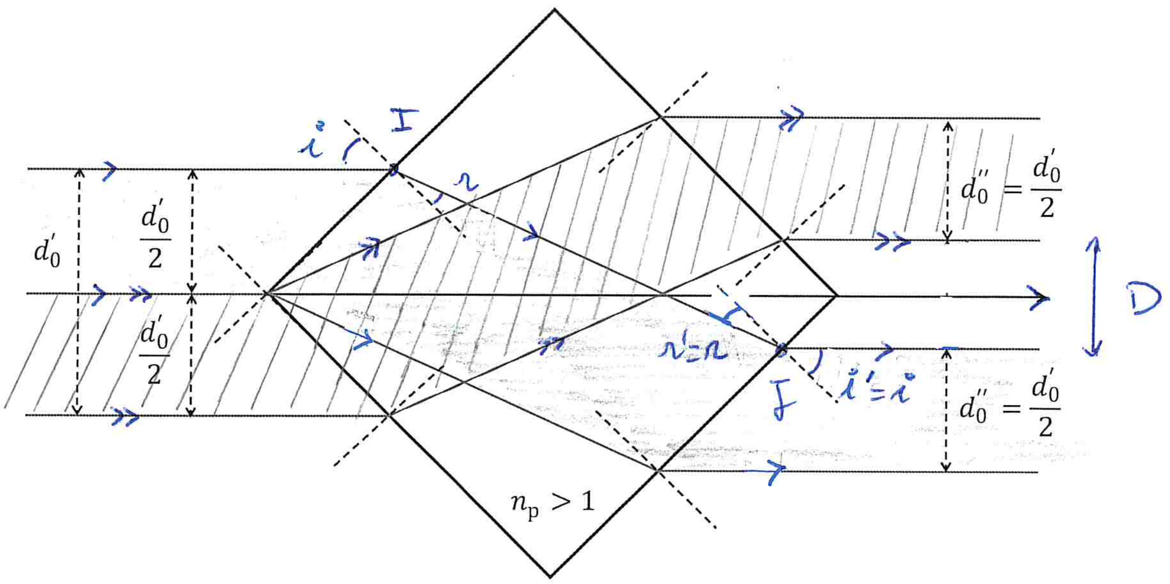
si L_1 est cvg et L_2 dvg alors $d_0' < d_0$



Si L_1 est dvg et L_1 cvg alors $d_0' > d_0$.

Il faut donc placer la lentille divergente en 1^{re}.

7.



8. en I : $\sin i = n_p \sin r$

en J : l'angle d'incidence est toujours r (les 2 faces du cube sont parallèles) : $\boxed{r' = r}$

donc $n_p \sin r' = \sin i'$ donc $\boxed{i' = i}$

Les faisceaux se décalent l'un par rapport à l'autre mais gardent la même direction.

9. La réflexion totale à l'entrée du cube est impossible car $n_{air} = 1 < n_p$. Or il faut $n_2 < n_1$ pour une réflexion totale.