I Les fonctions

Exercice 1
Que fait le programme suivant ?

```
def estbis(a):
   if a%4==0 and a%100!=0:
      r=True
   else:
      r=False
   return r
```

II Nombres premiers

Exercice 2

1. Écrire un **programme** demandant un entier N, et énonçant la liste des diviseurs de N.
   Combien 540 a-t-il de diviseurs ? *Pouvait-on le prévoir ?*
2. Écrire une **fonction** `petit_div` associant à tout entier naturel N (supérieur à 2) son plus petit diviseur (supérieur à 2). Compléter :

N	petit-div(N)	N	petit-div(N)
11		1111111111	
111		11111111111	
1111		111111111111	
11111		1111111111111	
111111		11111111111111	
1111111		111111111111111	
11111111		1111111111111111	
111111111		11111111111111111	

3. Écrire une fonction `estpremier` associant à tout entier naturel N la valeur `True` si N est premier et `False` sinon. Compléter :

N	estpermier(N)
0	
1	
2	
9	
11	
169	
1001	
1111111111111111111	

Exercice 3
Écrire une fonction `effectif` déterminant le nombre de nombres premiers entre a et b (compris).
On vérifiera que `effectif(0,10)` donne bien 4.
Compléter :

N	0	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8	10^9
effectif(N,N+1000)								

Exercice 4
Écrire des programmes permettant de déterminer :

1. un couple de nombre premiers jumeaux (i.e. différant de 2) supérieurs à 10^{12}.
   On ne sait pas s'il existe une infinité de nombres premiers jumeaux.
2. un entier A tel qu'il n'y ait aucun nombre premier entre A et $A + 100$ (compris).
   Savez-vous prouver qu'il existe des "trous" aussi grands que l'on veut dans l'ensemble des nombres premiers ?

III La suite de Syracuse

On considère la suite u définie par $u_0 \in \mathbb{N}^\star$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \begin{cases} 3u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ est impair} \\ \frac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ est pair} \end{cases}$$

Compléter à la main :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
u_n	3													

On conjecture que quel que soit l'entier u_0 choisi, il existe un rang N tel que $u_N = 1$.
Pour un entier u_0 donné, on nomme parfois :

- *durée du vol*, l'entier défini par : $\min\{N \in \mathbb{N}^\star, u_N = 1\}$
- *altitude maximale du vol*, l'entier défini par : $\max\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$
- *durée de vol en altitude*, l'entier défini par : $\max\{n \in \mathbb{N}, \forall k \in [\![0, n]\!], u_n \geqslant u_0\}$

Compléter à la main :

u_0	3
Durée du vol	
Altitude maximale	
Durée de vol en altitude	

Exercice 5
Écrire une **fonction** `syracuse` prenant comme argument u_0 et n et donnant la valeur de u_n.
On vérifiera que `syracuse(3,5)`, par exemple, donne bien la valeur attendue.

Exercice 6
Écrire dans chacun des cas suivants, un programme ou une fonction demandant à l'utilisateur le premier terme u_0 et affichant :

1. les N premiers termes de la suite (N étant également entré par l'utilisateur) ;
2. le vol ;
3. la durée du vol ;
4. l'altitude maximale du vol ;
5. la durée de vol en altitude.

Compléter à la main :

u_0	7	26	27	28	703
Durée du vol					
Altitude maximale					
Durée de vol en altitude					

Actuellement, on ne sait toujours pas si la conjecture de Syracuse est vraie ou fausse. Pour aller plus loin, lire sur le net l'excellent article Logique et calcul : La conjecture de Syracuse de Jean-Paul Delahaye.

Paul Erdős a dit à propos de la conjecture de Syracuse :

« LES MATHÉMATIQUES NE SONT PAS ENCORE PRÊTES POUR DE TELS PROBLÈMES ».