Résolutions d'équations différentielles par une méthode numérique

I Parabole de sûreté

1 Position du problème

Un projectile est lancé depuis l'origine du repère O avec la vitesse initiale v_0 = 10 m.s^{-1}, avec un angle α par rapport à l'horizontale, dans un champ de pesanteur $\vec{g} = -g\overrightarrow{u_y} = -9{,}8\overrightarrow{u_y}$ et dans le cas où les frottements sont négligeables.

La portée du tir est égale à $x_{max} = \frac{v_0^{\,2}}{g} sin(2\alpha) = 10{,}2 \times sin(2\alpha)$; maximale pour $\alpha = \pi/4$

L'ensemble des points accessibles par le projectile, pour une vitesse initiale v_0 donnée, se situent sous une courbe appelée parabole de sûreté et d'équation $y_s(x) = \frac{v_0^{\,2}}{2g} - \frac{g}{2v_0^{\,2}} x^2$

Démonstration :

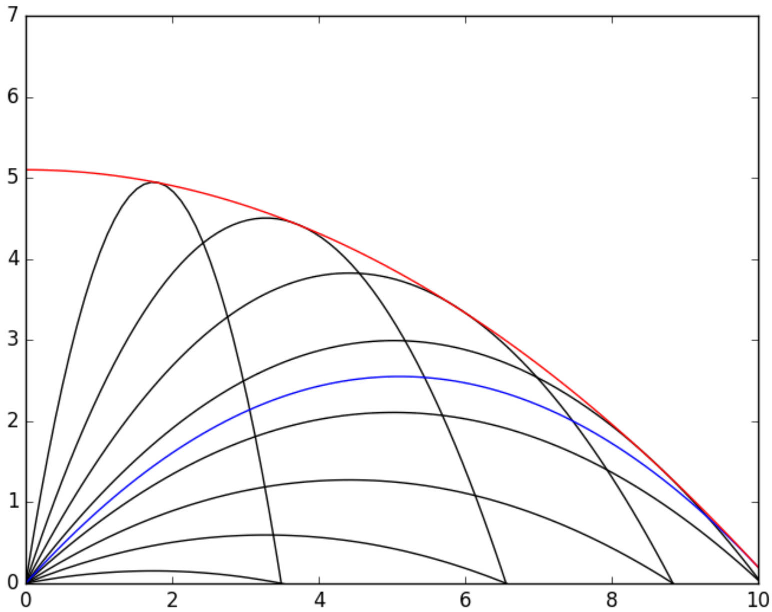
Déterminer l'équation de la trajectoire $y_S(x)$ délimitant la zone des points que peut atteindre le projectile lancé de O avec une vitesse $\overrightarrow{v_0}$ donnée, de norme constante et de direction α (entre 0 et $\pi/2$).

Aide : écrire l'équation de la trajectoire parabolique $y(x)$ puis remplacer $1/(\cos\alpha)^2$ par $1 + (\tan\alpha)^2$ afin d'obtenir une équation du second degré en $\tan\alpha$. Se demander alors à quelle condition (sur y et x) il existe un angle α tel que le point M de coordonnées (x,y) peut être atteint (à v_0 fixé).

2 Tracés des courbes avec Python

- Par résolution numérique de l'équation différentielle de la chute libre $\ddot{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{t}) = -\boldsymbol{g}$, tracer sur le même graphe plusieurs trajectoires pour v_0 = 10 m.s^{-1} et pour différentes valeurs de α (tracer d'une couleur différentes la trajectoire correspondant à $\alpha = \pi/4$).
- Tracer sur le même graphe et d'une autre couleur la parabole de sûreté.

3 Courbes et commentaires



A l'oral :

- vidéo-projeter et expliquer succinctement la démonstration de l'équation de la parabole de sûreté (sans détailler les calculs) en expliquant clairement ce qu'elle représente.

- interpréter les courbes tracées.

- vidéo projeter le programme Python et commenter-le succinctement.

II Oscillations libres dans le cas d'un système du second ordre

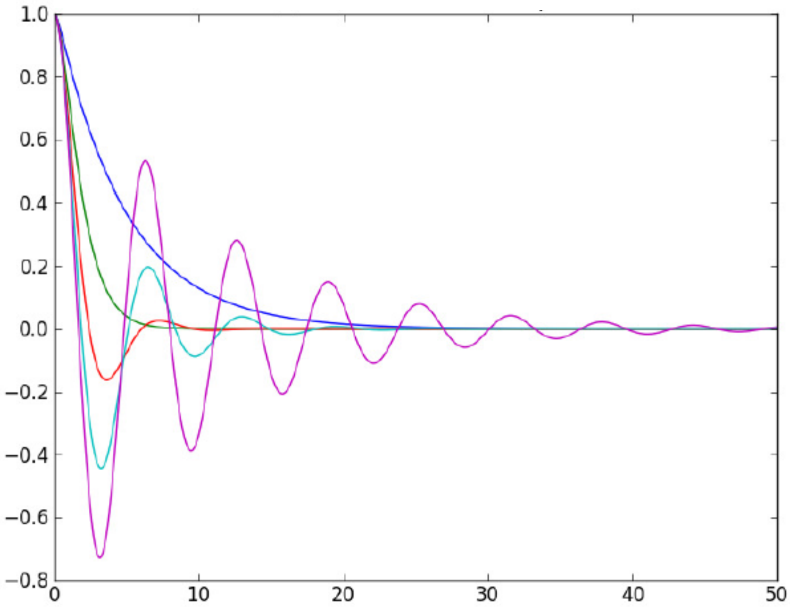
1 Position du problème

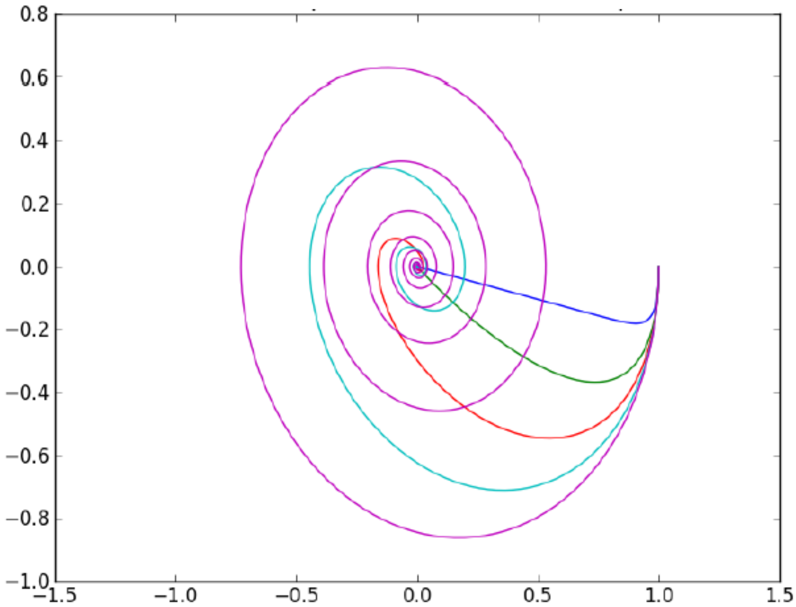
L'allongement x d'un ressort horizontal soumis à des frottements fluides (ou la tension aux bornes du condensateur dans le cas d'un circuit RLC série) vérifie l'équation différentielle : $\boxed{\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$

2 Résolution numérique avec Python

- Tracer *x* = f(*t*) par résolution numérique de l'équation différentielle pour différentes valeurs de *Q* (*Q* < ½ ; *Q* = ½ ; *Q* > ½)
- Tracer le portrait de phase $\dot{x} = f(x)$ pour les mêmes valeurs de *Q* que précédemment.

3 Courbes et commentaires





<u>A l'oral</u> :

- vidéo projeter et expliquer succinctement.la démonstration des solutions analytiques de l'équation différentielle.

- commenter les courbes x = f(t) en fonction de la valeur de Q.

- interpréter les courbes correspondantes dans le plan de phase.

- vidéo projeter le programme Python et commenter la méthode de résolution.

III Pendule non linéaire

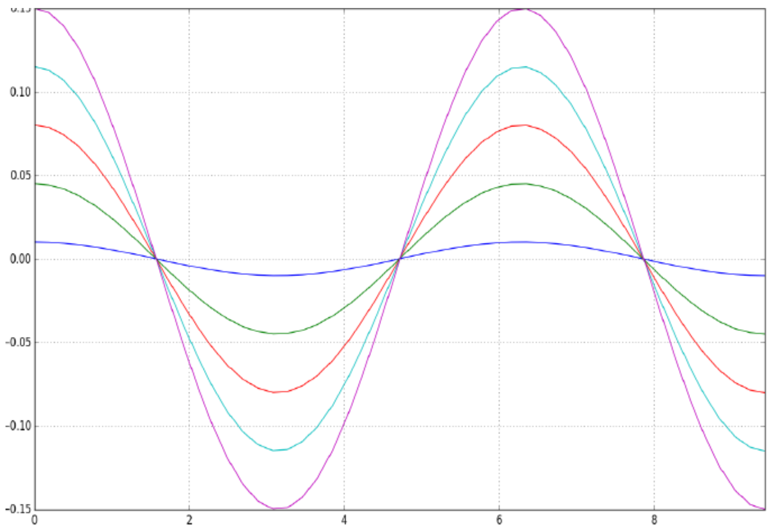
1 Position du problème

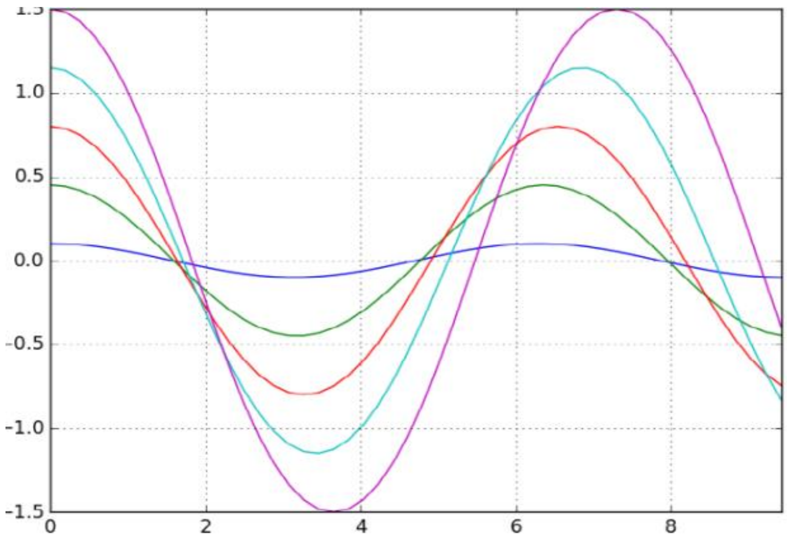
Soit un pendule de masse *m* et de longueur *L*, de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{g/L}$. L'équation différentielle vérifiée par l'angle θ entre la direction du pendule et la verticale est : $\boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0}$

2 Résolution numérique avec Python

- Effectuer le changement de variable $t^* = \omega_0 t$ afin d'adimensionner l'équation différentielle ; on notera $\dot{\theta}^* = d\theta/dt^*$.
- Tracer sur un même graphe plusieurs courbes $\theta = f(t^*)$ pour $\dot{\theta}(0) = 0$ et $\theta(0) \in [0{,}01\,;0{,}1]$
- Tracer sur un autre graphe plusieurs courbes $\theta = f(t^*)$ pour $\dot{\theta}(0) = 0$ et $\theta(0) \in [0{,}15\,;1{,}5]$
- Tracer sur un même graphe les courbes $\dot{\theta}^* = f(\theta)$ pour $\dot{\theta}(0) = 0$ et pour toutes les valeurs de $\theta(0)$ précédentes.

3 Courbes et commentaires





<u>A l'oral</u> :

- vidéo projeter et expliciter succinctement la démonstration de l'équation différentielle adimensionnée du pendule.

- justifier les tracés dans le cas des petites oscillations

- justifier les tracés dans le cas des oscillations d'amplitude plus importante

- interpréter les courbes tracées dans le plan de phase

- vidéo projeter le programme Python et commenter la méthode de résolution.

IV Particule chargée dans un champ électromagnétique

1 Position du problème

- Cas 1 : un électron de charge -*e* et de masse *m* est placé au point *O* (origine du repère) avec une vitesse initiale $\overrightarrow{V_0} = V_0 \overrightarrow{u_x}$ dans un champ magnétique $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{u_z}$.

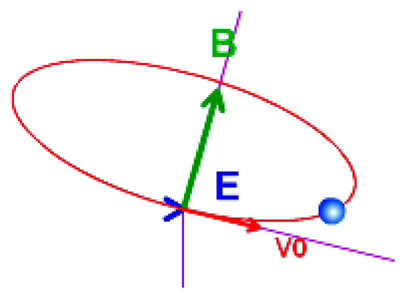
  Les vitesses V_x et V_y vérifient les équations : $\boxed{\dot{V}_x = -\omega V_y \text{ et } \dot{V}_y = \omega V_x}$ avec $\omega = \frac{eB}{m}$
- Cas 2 : une particule de charge positive *q* et de masse *m* est placée au point *O* (origine du repère) sans vitesse initiale dans un champ électromagnétique : $\overrightarrow{E} = E\overrightarrow{u_y}$ et $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{u_z}$

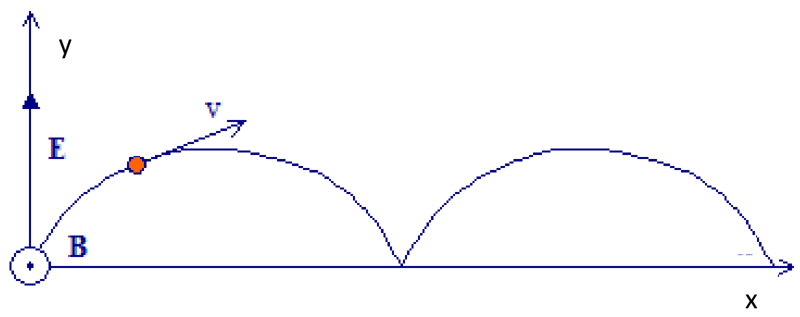
  Les vitesses V_y et V_z vérifient les équations : $\boxed{\dot{V}_x = \omega V_y \text{ et } \dot{V}_y = -\omega v_x + \omega \frac{E}{B}}$ avec $\omega = \frac{qB}{m}$
- Effectuer le changement de variable *t** = *ωt* afin d'adimensionner les équations différentielles précédentes ; on notera $V_x^* = dx/dt^*$ et $V_y^* = dy/dt^*$; $x^* = \frac{B\omega}{E}x$ et $y^* = \frac{B\omega}{E}y$

2 Résolution numérique avec Python

- Tracer la trajectoire *y** = f(*x**) dans le cas 1.
- Comment est censée évoluer la norme de la vitesse et pourquoi ? Cette propriété est-elle vérifiée par les solutions des équations différentielles ?
- Tracer la trajectoire *y** = f(*x**) dans le cas 2.

3 Courbes et commentaires





<u>A l'oral</u> :

- vidéo projeter et commenter succinctement les démonstrations des équations différentielles vérifiées par les coordonnées de la particule.

- comparer les courbes obtenues avec les solutions analytiques, celles du cas 1 ayant été vues en cours et celles du cas 2 étant :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{E}{B\omega}[\omega t - \sin(\omega t)] \\ y(t) = \frac{E}{B\omega}[1 - \cos(\omega t)] \end{cases}$$

- vidéo projeter le programme Python et commenter la méthode de résolution.

V Les différentes trajectoires d'un système soumis à un champ newtonien en 1/r²

1 Position du problème

Un système de masse *m* soumis à un champ gravitationnel (centripète en $1/r^2$), aussi appelé champ Newtonien, suit une trajectoire de type conique : une hyperbole, une parabole ou une ellipse (dont le cercle est un cas particulier). La trajectoire suivie dépend des conditions initiales.

On peut prouver que les coordonnées polaires (r , θ) décrivant la position du système vérifient les équations différentielles :

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{d^2r}{dt^2} = \dfrac{1}{r^3} - \dfrac{1}{r^2} \\ \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{1}{r^2} \end{array}}$$

(remarque : il s'agit en fait de coordonnées réduites sans dimension $r = \dfrac{OM}{r_0}$)

2 Résolution numérique avec Python

Tracer r = f(θ) pour un système suivant les équations différentielles précédentes avec les différentes conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} \theta(t=0) = 0 \\ \dfrac{dr}{dt}(t=0) = 0 \\ r(t=0) = \dfrac{-1+\sqrt{1+\alpha}}{\alpha} \end{cases}$$

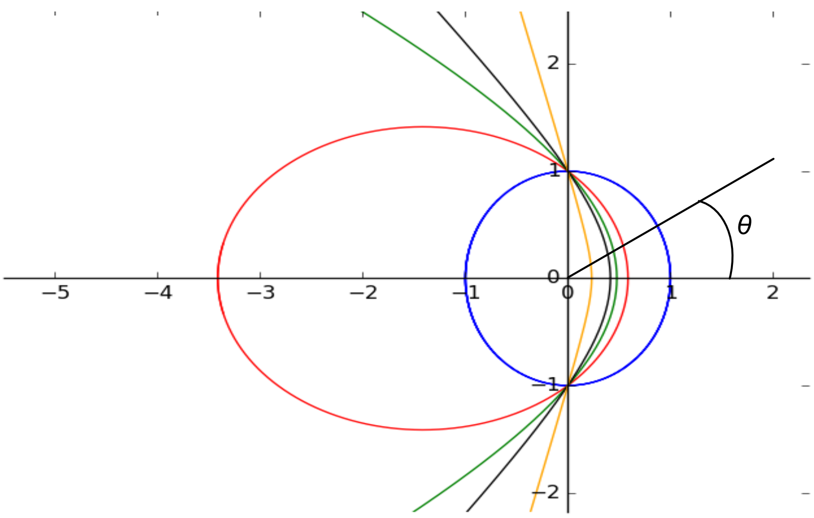
avec $\alpha = -1 \ ; \ \alpha \in \left]-1;0\right[\ ; \ \alpha = 0 \ ; \ \alpha > 0$

α étant un paramètre constant égal à l'énergie mécanique adimensionnée du système : $\alpha = E_m / E_0 \in \left[-1;+\infty\right[$

<u>Remarques</u> :

- un rappel qui peut-être utile : les coordonnées cartésiennes sont égales à $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$
- A la date t = 0, l'angle θ est fixé à 0, la valeur de $\dot{r}$ est fixé à 0 (donc tangente initiale selon $\vec{u}_{\theta=0}$ c'est-à-dire verticale) mais la valeur de $r(t = 0)$ dépend de la valeur de α (donc de la valeur de l'énergie mécanique) et n'est pas la même pour chaque courbe tracée.

3 Courbes et commentaires



<u>A l'oral</u> :

- décrire les différentes courbes coniques obtenues.

- interpréter les différents types de courbes obtenues (courbes fermées ou ouvertes).

- vidéo projeter le programme Python et commenter la méthode de résolution.

VI Oscillations dans un puits de potentiel non linéaire

1 Position du problème

Soit une particule de masse m située dans un puits non linéaire d'énergie potentielle $E_p(x)=E_0[1-e^{-(\frac{x}{L})^2}]$ ou $E_p^*(x)=1-e^{-(\frac{x}{L})^2}$ en utilisant la variable adimensionnée $E_p^*(x)=E_p(x)/E_0$

Déterminer la force qui dérive de l'énergie potentielle $E_p(x)$ et en déduire l'équation différentielle vérifiée par l'abscisse x de la particule (dans le cas où les frottements sont négligeables).

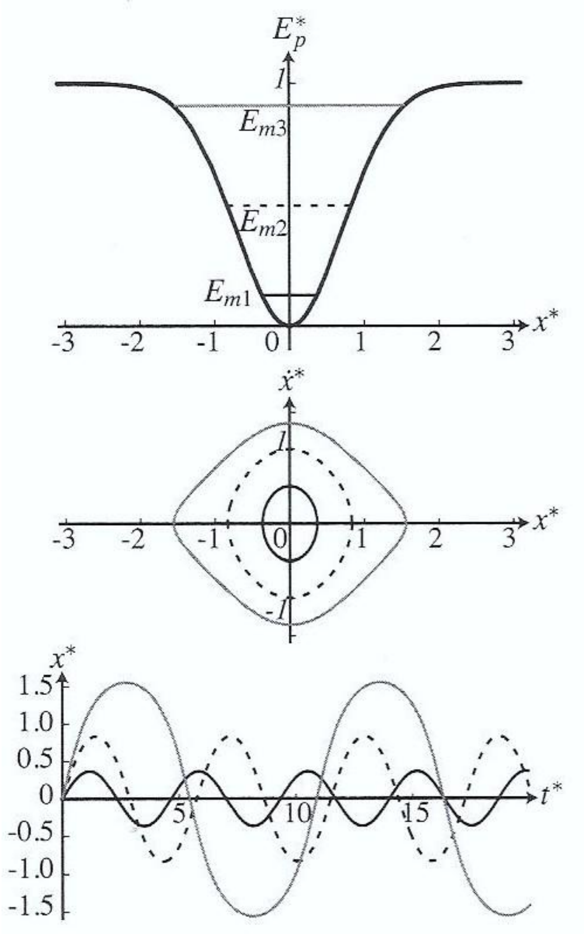
En posant les variables adimensionnées $x^*=\frac{x}{L}$ et $t^*=\frac{t}{t_0}$ avec $t_0=\frac{L}{v_0}$ et $v_0=\sqrt{\frac{E_0}{m}}$ on peut montrer que x^* vérifie l'équation différentielle non linéaire : $\boxed{\ddot{x}^*=-2x^*\exp(-x^{*2})}$ (démonstration non demandée)

2 Résolution numérique avec Python

Nous allons résoudre cette équation différentielle avec Python dans le cas $x^*(0)=0$ et pour différentes valeurs de $\dot{x}^*(0)$.

- Tracer la courbe $E_p^*(x^*)=1-e^{-(x^*)^2}$
- Faire apparaitre sur ce graphe différentes valeurs de l'énergie mécanique adimensionnée $E_m^*=\frac{E_m}{E_0}=\frac{1}{2}(\dot{x}^*(0))^2$ pour différentes valeurs de $\dot{x}^*(0)$.
- Tracer $\dot{x}^*=f(x^*)$ pour les différentes valeurs de $\dot{x}^*(0)$ précédentes .
- Tracer $x^*=f(t^*)$ pour les différentes valeurs de $\dot{x}^*(0)$ précédentes.

3 Courbes et commentaires



<u>A l'oral</u> :

- vidéo projeter et commenter succinctement la démonstration de l'équation différentielle vérifiée par x (pas celle vérifiée par x).*

- commenter les tracés des courbes obtenues.

- vidéo projeter le programme Python et commenter la méthode de résolution.

VII Projectile avec frottement

1 Position du problème

Soit un projectile lancé avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ dans un champ de pesanteur $\vec{g} = -g\overrightarrow{u_y} = -9{,}8\overrightarrow{u_y}$ (l'axe (*Oy*) est dirigé vers le haut) et soumis à une force de frottement $\vec{f} = -kv\vec{v}$

- Déterminer l'équation différentielle vérifiée par le vecteur vitesse $\vec{v}$
- Prouver que la vitesse atteint la valeur limite $v_{lim} = \sqrt{mg/k}$

En posant $v^* = \frac{v}{v_{lim}}$ et $t^* = \frac{g}{v_{lim}}t$, on peut prouver que la vitesse adimensionnée $\vec{v}^*$ vérifie l'équation différentielle (1) : $\frac{d\overrightarrow{v^*}}{dt^*} = -v^*\overrightarrow{v^*} - \overrightarrow{u_y}$ (justification non demandée).

Dans le cas où $v_x^* = 0$ à chaque instant et en choisissant un axe (Oy) orienté vers le bas la norme $v^* = -v_y^*$

Montrer alors que v^* vérifie l'équation différentielle $\boxed{\frac{dv^*}{dt^*} = 1 - v^{*2}}$

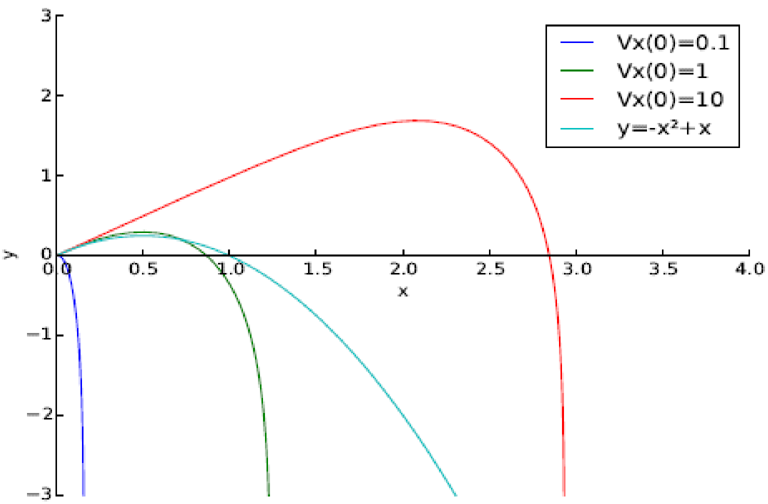
2 Résolution numérique avec Python

- De l'équation différentielle vectorielle (1), on en déduit le système différentiel suivant :

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{v}_x^* &= -v_x^*\sqrt{(v_x^*)^2 + (v_y^*)^2} \\ \dot{v}_y^* &= -v_y^*\sqrt{(v_x^*)^2 + (v_y^*)^2} - 1 \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} &\text{avec } v_x^* = \frac{dx^*}{dt^*} \\ &\text{avec } v_y^* = \frac{dy^*}{dt^*} \end{aligned}$$

- Tracer les trajectoires $y^* = f(x^*)$ pour un angle initial α = 45° $(v_x^*(0) = v_y^*(0))$ et pour différentes valeurs de $v_x^*(0)$: $v_x^*(0) << 1$; $v_x^*(0) = 1$; $v_x^*(0) >> 1$
- Sur un second graphe, tracer à nouveau la courbe correspondant à $v_x^*(0) = 1$ ainsi que la courbe d'équation $y^* = -(x^*)^2 + x^*$ correspondant à la trajectoire du projectile dans le cas $v_x^*(0) = 1$, α = 45° et sans frottement.
- Sur un troisième graphe, tracer $v^* = f(t^*)$ dans le cas $v^*(0) = 0$,

3 Courbes et commentaires



A l'oral :

- *vidéo projeter et commenter succinctement les démonstrations demandées.*
- *commenter les tracés des courbes obtenues.*
- *vidéo projeter le programme Python et commenter la méthode de résolution.*

VIII Oscillations dans un double puits de potentiel

1 Position du problème

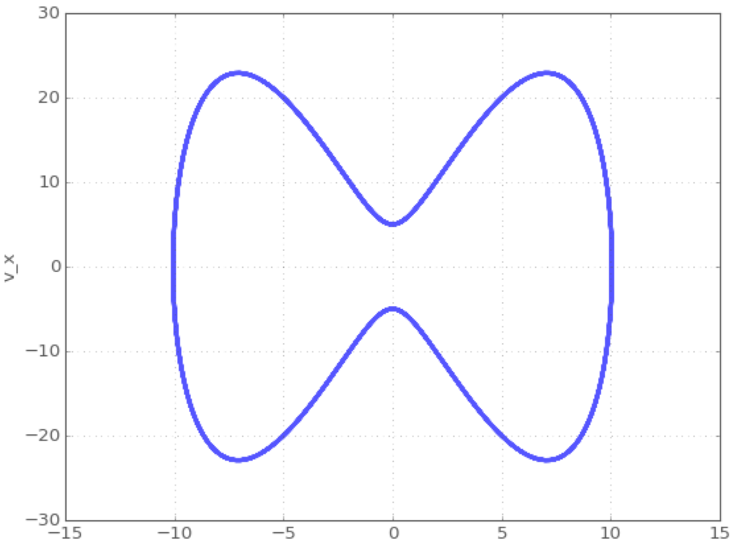
- Soit une particule de masse *m* située dans un puits d'énergie potentielle parabolique $E_p(x) = x^2$ centré sur *x* = 0. Déterminer la force qui dérive de l'énergie potentielle $E_p(x)$ et en déduire l'équation différentielle vérifiée par l'abscisse *x* de la particule (dans le cas où les frottements sont négligeables).
- Etablir de même l'équation différentielle vérifiée par l'abscisse *x* de la particule dans le cas où la force de frottement est selon (*Ox*) et du type $F_x = -\mu \dfrac{dx}{dt}$
- Pour un double puits paraboliques symétriques par rapport à *x* = 0, on peut proposer l'expression de l'énergie potentielle suivante : $E_p(x) = -4x^2 + 4x^4 + 1$

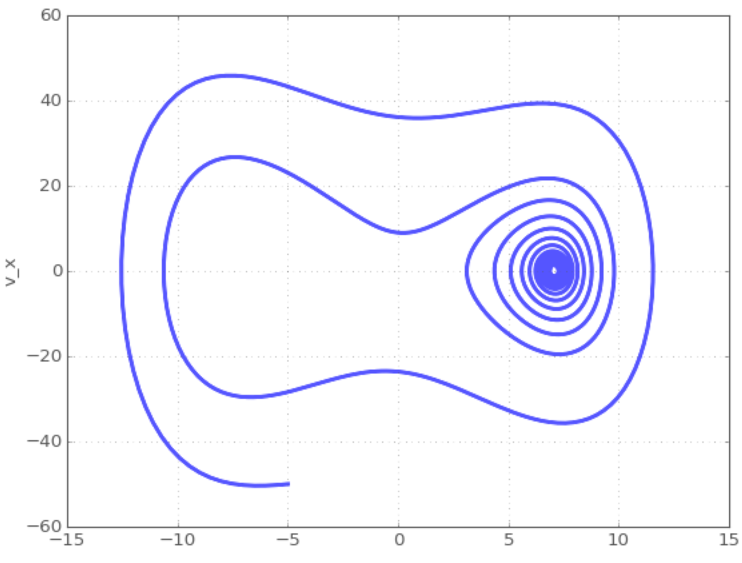
  En déduire de même les équations différentielles vérifiées par *x* dans les cas avec et sans frottement.

2 Résolution numérique avec Python

- Tracer les courbes représentant $E_p(x)$ dans les cas du puits parabolique et du double puits.
- Résoudre les 4 équations différentielles.
- Tracer dans chacun des cas les évolutions de *x(t)*.
- Tracer dans chacun des cas les trajectoires dans le plan de phase.

3 Courbes et commentaires





__A l'oral__ :

- vidéo projeter et commenter succinctement les démonstrations demandées.

- commenter les tracés des courbes obtenues.

- étudier l'influence de la vitesse initiale dans le cas du double puits.

- vidéo projeter le programme Python et commenter la méthode de résolution.

IX Influence de différents paramètres sur l'évolution d'un système chimiques

1 Position du problème

On étudie un équilibre chimique entre les espèces chimiques A, B, C et D.

On modélise cet équilibre par l'équation suivante : A + B = C + D (avec des nombres stœchiométriques égaux à 1 pour simplifier).

On note K la constante de la réaction.

Du point de vu cinétique, on note k_1 la constante cinétique pour la réaction se faisant dans le sens direct et on considère pour simplifier que les ordres partiels sont égaux à 1 pour les espèces A et B.

On note de la même façon k_2 la constante cinétique pour la réaction se faisant dans le sens inverse et on considère pour simplifier que les ordres partiels sont égaux à 1 pour les espèces C et D.

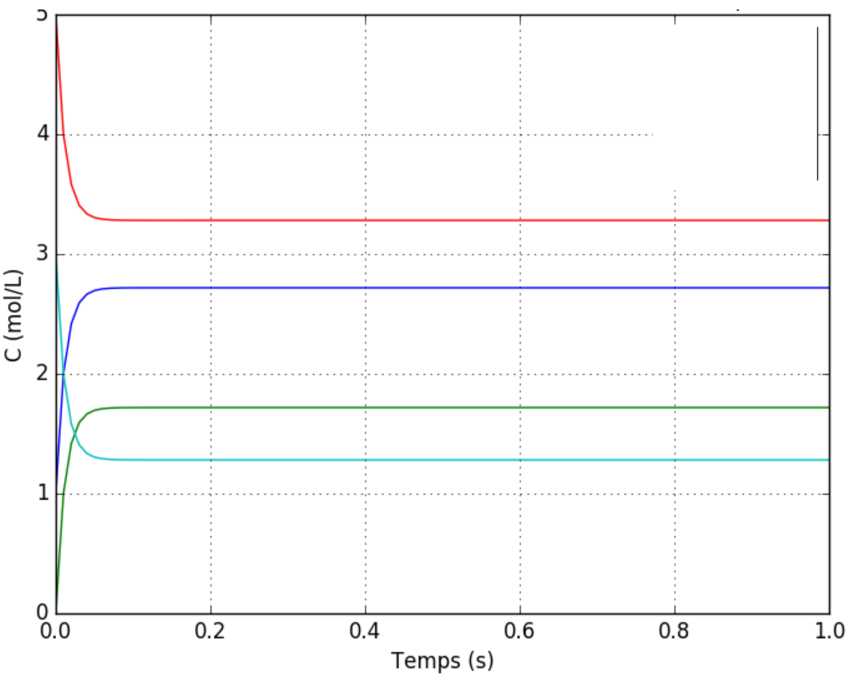
- Justifier que $\frac{d[A]}{dt} = -k_1[A][B] + k_2[C][D]$
- En déduire par analogie les expressions de $\frac{d[B]}{dt}$, $\frac{d[C]}{dt}$ et $\frac{d[D]}{dt}$.
- Démontrer l'expression de la constante de réaction K en fonction des constantes cinétiques k_1 et k_2.

2 Résolution numérique avec Python

L'objectif est d'étudier l'influence de la valeur de K, de la valeur de k_1 ainsi que des concentrations initiales sur le sens d'évolution et sur l'état final.

- Résoudre le système d'équations différentielles dans le cas $[A](0) = [B](0)$ et $[C](0) = [D](0) = 0$
- Préciser le sens d'évolution de la réaction ainsi que la valeur de l'avancement volumique final.
- Tracer l'évolution des concentrations $[A](t)$, $[B](t)$, $[C](t)$ et $[D](t)$ pour différentes valeurs de K.
- Tracer l'évolution des concentrations $[A](t)$, $[B](t)$, $[C](t)$ et $[D](t)$ pour différentes valeurs de k_1, la valeur de K étant maintenue constante.
- Tracer l'évolution des concentrations $[A](t)$, $[B](t)$, $[C](t)$ et $[D](t)$ pour différentes conditions initiales.

3 Courbes et commentaires



A l'oral :

- *vidéo projeter et commenter succinctement les démonstrations demandées.*
- *vidéo projeter le programme Python et commenter la méthode de résolution.*
- *étudier l'influence de la valeur de K sur le sens d'évolution et sur l'état final.*
- *étudier de même l'influence de la valeur de k_1.*
- *étudier de même l'influence des conditions initiales.*

X Filtre passe-bande d'ordre 2

1 Position du problème

On s'intéresse à un filtre passe-bande d'ordre 2 réalisé à l'aide d'un circuit *RLC*. On chercher à simuler la réponse à une tension sinusoïdale. On rappelle que la tension d'entrée et la tension de sortie sont reliées par l'équation différentielle : $LC\frac{d^2s}{dt^2}+RC\frac{ds}{dt}+s=RC\frac{de}{dt}$

La continuité du courant dans la bobine et de la tension aux bornes du condensateur imposent respectivement : $s(0^+)=0$ et $\frac{ds}{dt}(0^+)=\frac{R}{L}[e(0)-u_c(0)]$

On supposera le condensateur initialement chargé : $u_c(0^+)\neq 0$. Dans un premier temps, on pourra prendre *R* = 1 kΩ, *L*=10 mH et *C* = 100 nF. La tension d'entrée peut être écrite sous la forme :

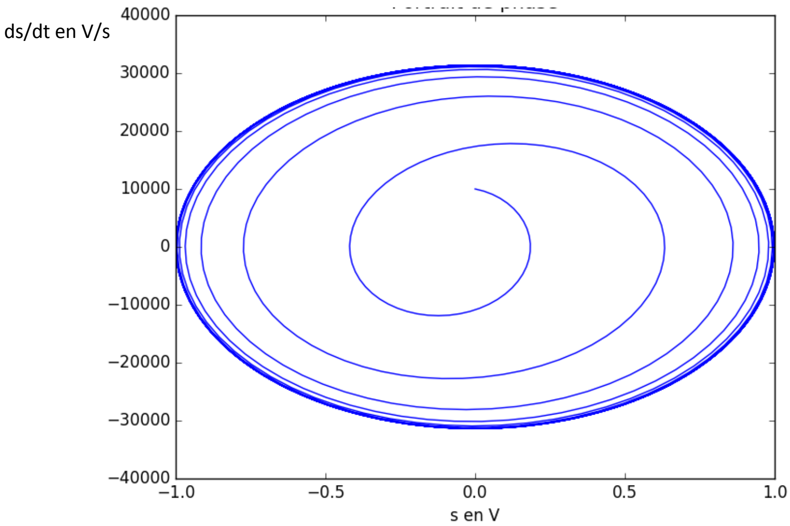
$$e(t)=e_0\,cos(2\pi ft)$$

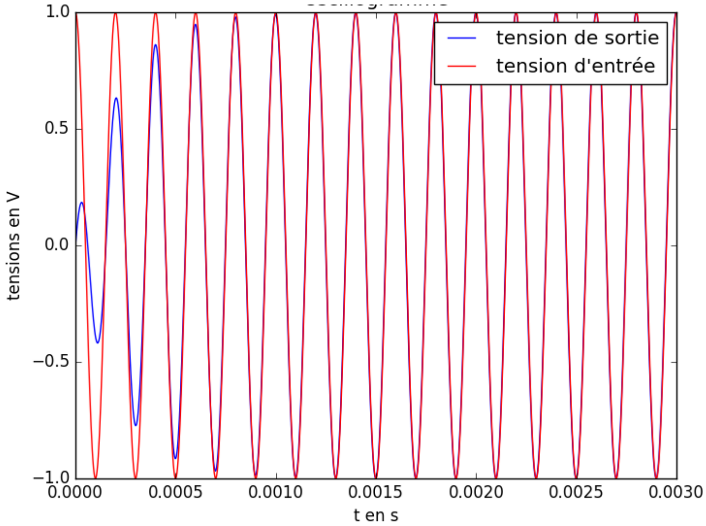
avec par exemple *f* = 5 kHz et e_0 = 1 V. On n'aura pas intérêt à calculer numériquement la dérivée de *e*(*t*), mais à utiliser l'expression explicite : $\frac{de}{dt}(t)=-2\pi f\ e_0\,sin(2\pi ft)$

2 Résolution numérique avec Python

- Résoudre l'équation différentielle avec Python.
- Etudier l'effet du régime transitoire : que ce passe-t-il en fonction de $u_c(0)$? Observe-t-on ce régime transitoire en TP d'électronique ? Voir en particulier ce qui se passe si *R* est faible.
- En régime établi, étudier le comportement du filtre en fonction de la fréquence du signal d'entrée.

3 Courbes et commentaires





A l'oral :

- Présenter le principe de la démonstration de l' équation différentielle proposée.

- vidéo projeter le programme Python et commenter la méthode de résolution.

- Commenter les courbes obtenues en répondant entre autre aux questions du paragraphe 2.

XI Attracteur de Lorenz

1 Position du problème

En 1963, le météorologue Edward Lorenz cherchait à modéliser certains phénomènes météorologiques. Ne pouvant résoudre analytiquement les équations (non-linéaires) de la mécanique des fluides, et ne disposant que d'un ordinateur de puissance limitée, il entreprit de simplifier fortement ses équations pour décrire un phénomène de convection (instabilité de Rayleigh-Bénard). Il aboutit au système d'équations différentielles (adimensionnées) suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}(t) = \sigma\left[y(t) - x(t)\right] \\ \dfrac{dy}{dt}(t) = \rho x(t) - y(t) - x(t)z(t) \\ \dfrac{dz}{dt}(t) = x(t)y(t) - \beta z(t) \end{cases}$$

Pour certaines valeurs de σ, ρ et β, le système comporte un attracteur étrange : pour des conditions initiales (presque) quelconques, il évolue vers un ensemble appelé « attracteur de Lorenz ».

2 Résolution numérique avec Python

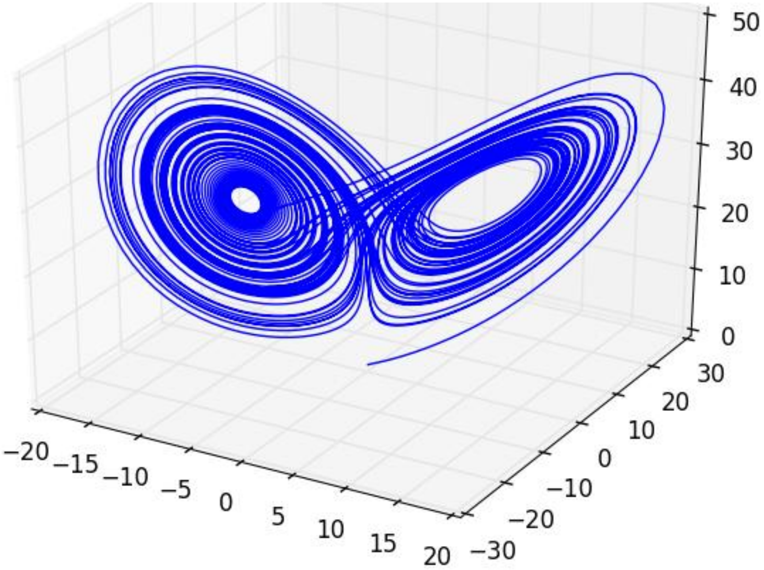
- Pour les simulations, on pourra prendre dans un premier temps $\sigma = 10$, $\rho = 28$ et $\beta = 8/3$, faire varier t entre 0 et 80 et choisir comme condition initiale (0,1 ; 0,1 ; 0,1).
- Résoudre numériquement le système d'équations différentielles. Tracer (en 3 dimensions) la « trajectoire » ($x(t)$,$y(t)$,$z(t)$). Vérifier que le système évolue vers l'attracteur pour des conditions initiales variées.
- Diminuer la valeur de ρ ; comment le système évolue-t-il ?
- Question subsidiaire : supprimer les termes non-linéaires du système différentiel et étudier le comportement du système (on pourra faire varier t entre 0 et 0,1). Quel est l'effet de la non-linéarité ?

Pour tracer des courbes en en 3D :

```
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
#
fig=plt.figure()
ax=fig.gca(projection='3d')
ax.plot(X,Y,Z)
plt.show()
```

où *X*, *Y* et *Z* sont les listes (ou des tableaux *numpy* contenant les coordonnées des différents points.

3 Courbes et commentaires



__A l'oral__ :

- Présenter succinctement le système d'équations différentielles.

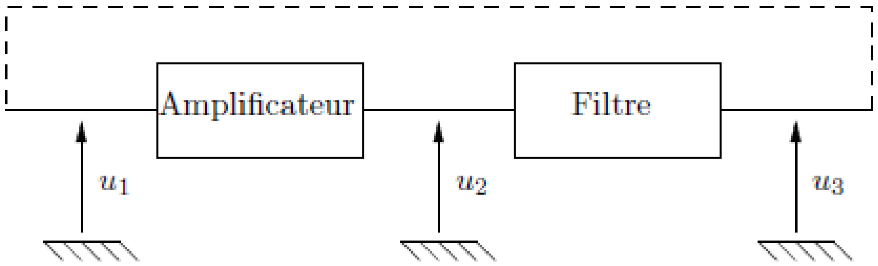
- vidéo projeter le programme Python et commenter la méthode de résolution.

- Commenter les courbes obtenues en répondant entre autre aux questions du paragraphe 2.

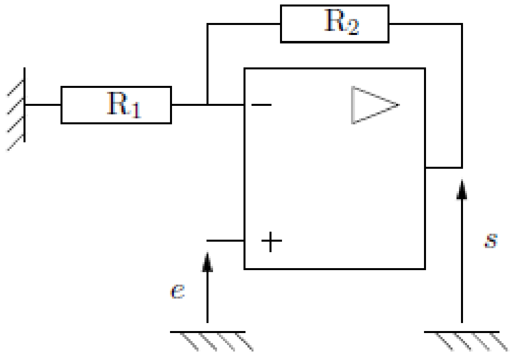
XII Oscillateur de Wien

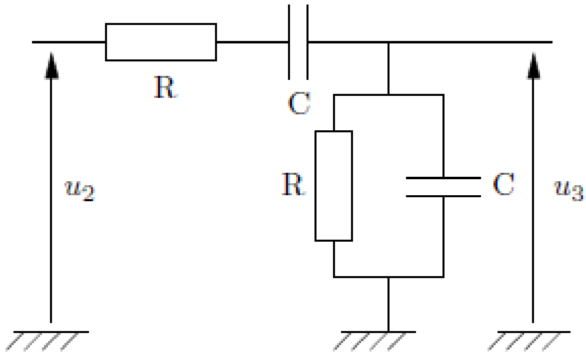
1 Position du problème

L'oscillateur de Wien est un montage électronique constitué d'un filtre passe-bande (appelé filtre de Wien) et d'un montage amplificateur réalisé avec un AO/ALI :



On donne la structure détaillée du filtre de Wien et du montage amplificateur :





La particularité de ce montage est que la moindre fluctuation de tension dans ce montage peut y faire naître des oscillations (sous réserve que les paramètres du montage soient bien choisis). Le filtre est caractérisé par l'équation différentielle : $(RC)^2\dfrac{d^2u_3}{dt^2}+3RC\dfrac{du_3}{dt}+u_3=RC\dfrac{du_2}{dt}$

et le montage amplificateur par la relation : $u_2=Gu_1$ avec $G=1+\dfrac{R_2}{R_1}$

Quand le montage est bouclé, les différentes tensions vérifient l'équation différentielle :

$$(RC)^2\frac{d^2u}{dt^2}+(3-G)RC\frac{du}{dt}+u=0$$

2 Résolution numérique avec Python

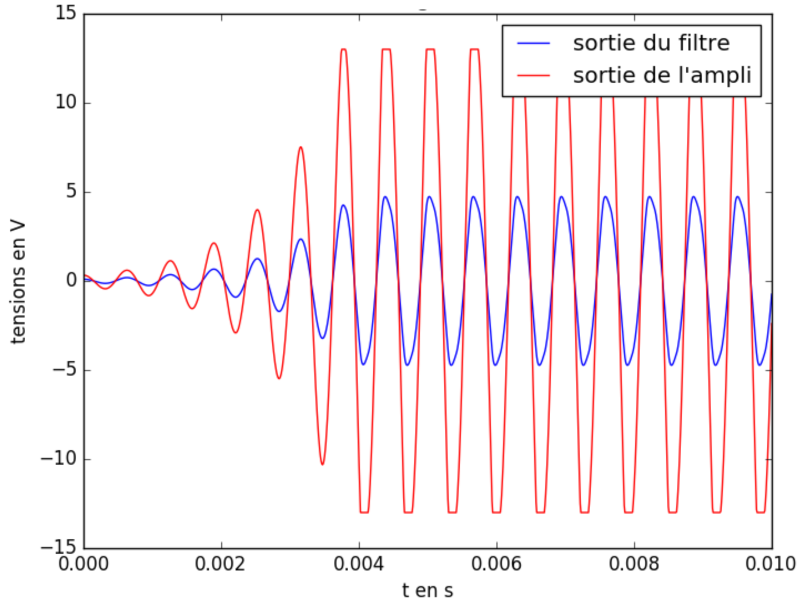
On cherche à simuler le comportement de ce montage.

- Programmer la résolution numérique de cette équation dans le cas où $G < 3$, $G = 3$ et $G > 3$. On pourra prendre les conditions initiales $u(0)$ = 10 mV et $u'(0) = 0$ ainsi que les valeurs R = 10 kΩ et C = 10 nF.
- En fait, le montage amplificateur ne peut pas produire un signal de sortie infiniment grand ; la tension de sortie est limitée par une valeur appelée tension de saturation V_s

$$u_2=\begin{cases}-V_s & si\ \ Gu_1\le -V_s\\ Gu_1 & si\ \ |Gu_1|\le V_s\\ V_s & si\ \ Gu_1\ge V_s\end{cases}$$

- Modifier le programme précédent pour simuler le comportement du montage. Tracer les courbes des tensions ainsi que le portrait de phase.

3 Courbes et commentaires



A l'oral :

- Présenter le principe de la démonstration de la première équation différentielle proposée.

- vidéo projeter le programme Python et commenter la méthode de résolution.

- Commenter les courbes obtenues en répondant entre autre aux questions du paragraphe 2.

XIII Etude d'un filtre passe-bas du premier ordre

1 Position du problème

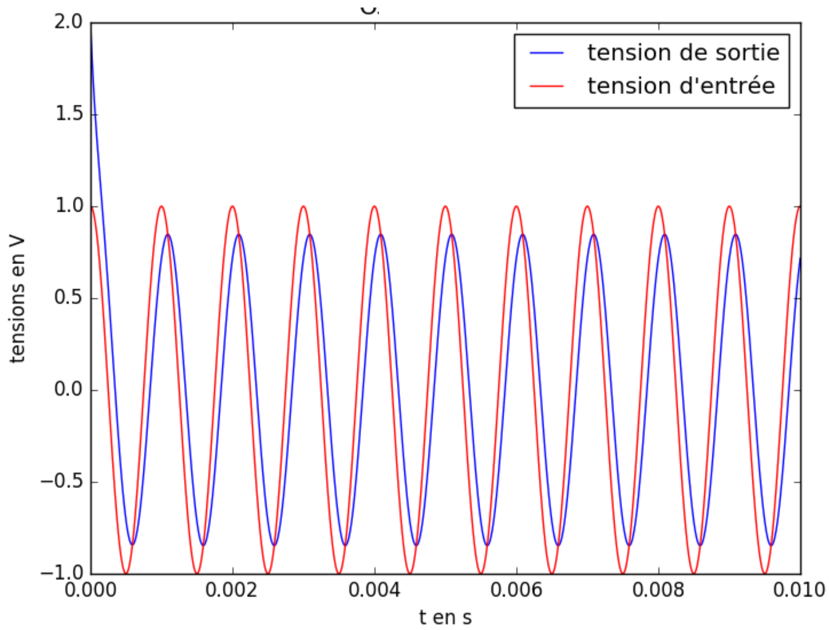
On s'intéresse à un filtre passe-bas d'ordre 1 réalisé à l'aide d'un circuit *RC*. On chercher à simuler la réponse à une tension sinusoïdale. On rappelle que la tension d'entrée et la tension de sortie sont reliées par l'équation différentielle : $RC\dfrac{ds}{dt}+s=e$

On supposera le condensateur initialement chargé : $s(0^+)\neq 0$. Dans un premier temps, on pourra prendre R = 1 kΩ et C = 100 nF. La tension d'entrée peut être écrite sous la forme : $e(t)=e_0\cos(2\pi ft)$ avec par exemple f = 1 kHz et e_0 = 1 V.

2 Résolution numérique avec Python

- Résoudre l'équation différentielle avec Python.
- Etudier l'effet du régime transitoire : que ce passe-t-il en fonction de $s(0)$? Observe-t-on ce régime transitoire en TP d'électronique ?
- En régime établi, étudier le comportement du filtre en fonction de la fréquence d'entrée.

3 Courbes et commentaires



A l'oral :

- Démontrer l'équation différentielle proposée.

- vidéo projeter le programme Python et commenter la méthode de résolution.

- Commenter les courbes obtenues en répondant entre autre aux questions du paragraphe 2.

XIV Propagation d'une épidémie - le modèle SIR

1 Position du problème

Des modèles simples permettent de d´écrire la dynamique d'une épidémie comme celle causée par le Covid-19. L'un de ces modèles, le modèle SIR, est un modèle « à compartiments » : la population est regroupées entre « personnes saines » (susceptibles d'être infectées par le virus) d'effectif S, « personnes infectées » (celles qui portent le virus et sont susceptibles de le transmettre) d'effectif I et « personnes retirées » (celles qui sont guéries et ne transmettent plus le virus) d'effectif R. La mortalité n'est pas prise en compte dans ce modèle.

Les effectifs S, I et R évoluent dans le temps, et vérifient les équations différentielles :

$$\frac{dS}{dt}(t) = -\beta S(t)I(t) \quad ; \quad \frac{dI}{dt}(t) = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \quad ; \quad \frac{dR}{dt}(t) = \gamma I(t)$$

où β est le taux de transmission et γ est le taux de guérison.

On introduit également le « taux de reproduction » R_0 qui est le nombre moyen de personnes contaminées par une personne infectées. On peut montrer que R_0 est donné au début de l'épidémie par : $R_0 = \frac{\beta}{\gamma}$

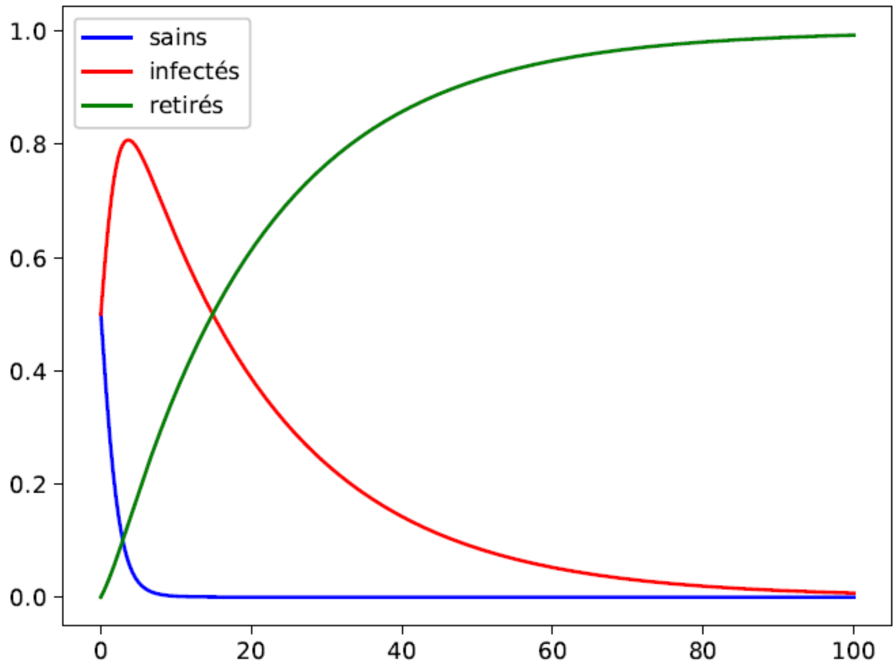
2 Résolution numérique avec Python

– Résoudre le système d'équations différentielles par la méthode d'Euler puis avec odeint et comparer les résultats. On pourra prendre par exemple β = 0,8 et γ = 0,05 ainsi que les conditions initiales $S(0)$ = 0,5 ; $I(0)$ = 0,5 ; $R(0)$ = 0.

– Faire varier les conditions initiales et étudier leur impact sur la dynamique de l'épidémie (on pourra se contenter de la résolution avec odeint).

– Faire varier les conditions initiales ainsi que les valeurs de β et γ pour étudier l'impact de R_0 sur la dynamique de l'épidémie.

3 Courbes et commentaires



A l'oral :

- Proposer une interprétation des équations différentielles en vous inspirant de la cinétique chimique.

- Vérifier que S(t) + I(t) + R(t) est constant et interpréter cette propriété.

- Interpréter la façon dont une augmentation ou une diminution de β ou γ modifie R_0.

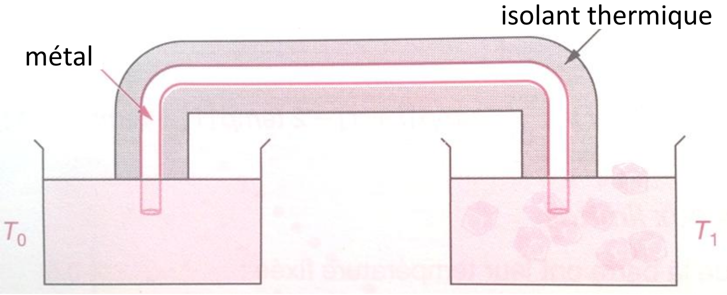
- vidéo projeter le programme Python et commenter la méthode de résolution

Pour aller plus loin : http://images.math.cnrs.fr/Modelisation-d-une-epidemie-partie-1.html

XV Diffusion thermique

1 Position du problème

On considère une barre métallique homogène de longueur *L* et de section *S*, dont les parois latérales sont calorifugées.
Ses extrémités sont plongées dans deux bains liquides, dont les températures sont maintenues à des valeurs fixées T_0 et T_1 (bain thermostaté pour ce qui concerne T_0 et mélange eau-glace pour ce qui concerne T_1).



La barre est initialement à la température T_1 ; on souhaite simuler l'évolution au cours du temps du profil de température $T(x,t)$.

La température $T(x,t)$ vérifie l'équation différentielle $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{\kappa}\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ avec κ une constante appelée diffusivité thermique (vu en spé).

On introduira la grandeur adimensionnée $\theta(x,t) = \frac{T(x,t) - T_1}{T_0 - T_1}$ qui mesure l'écart de température ramené à l'écart maximal et qui vérifie la même équation différentielle que $T(x,t)$.

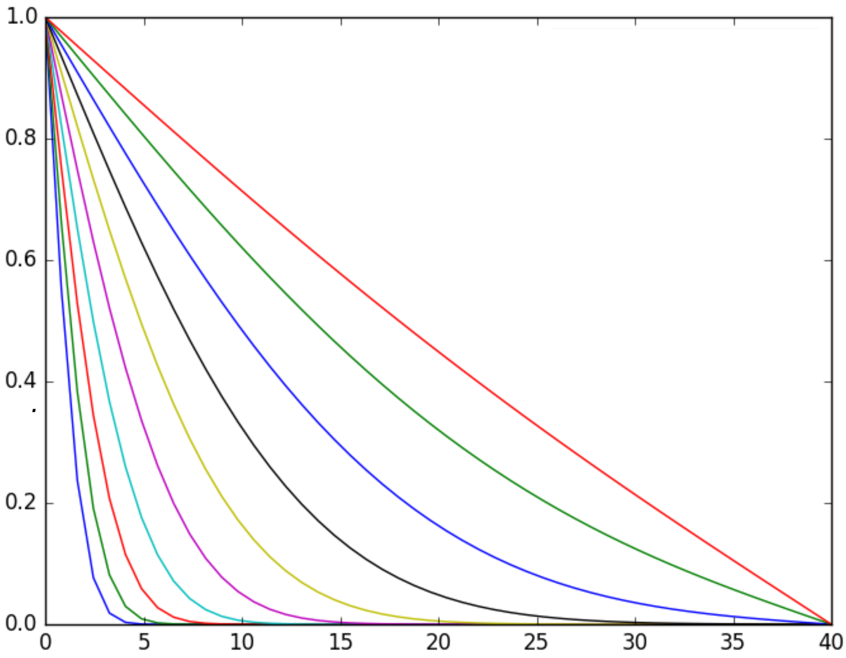
Déterminer $\theta(x,0)$ ainsi que les conditions aux limites $\theta(0,t)$ et $\theta(L,t)$ aux extrémités.

2 Résolution numérique avec Python

Après avoir effectué une discrétisation spatiale de la tige ainsi qu'une discrétisation temporelle, montrer que : $\theta(x_i, t+\Delta t) = \theta(x_i, t) + \Delta t \times \frac{\theta(x_{i+1}, t) - 2\theta(x_i, t) + \theta(x_{i-1}, t)}{\Delta x^2}$

Déterminer les valeurs de $\theta(x_i\ ,\ t_j)$ en différents points, à différents instants puis tracer les profils de température $\theta = f(x)$ à différentes dates *t*.

3 Courbes et commentaires



<u>A l'oral</u> :

- commenter les profils de température obtenus (conditions aux limites et évolution au cours du temps).

- interpréter la courbe obtenue en régime stationnaire.

- vidéo projeter le programme Python et commenter la méthode de résolution

Travail à faire et à présenter à l'oral le …………………………… (précisé ultérieurement)

- Vous allez former … groupes de 3 ou 4 élèves.

- Votre travail consiste à résoudre des équations différentielles, à tracer des courbes avec Python puis à faire une présentation à l'oral (sur beamer). Ce travail se fera en binôme en informatique mais par groupe de 3 ou 4 pour la présentation à l'oral.

- Précision : vous devez résoudre 2 des 14 cas proposés précédemment (un cas imposé parmi 12 et un cas à choisir parmi les 14 cas proposés), puis compléter le tableau ci-dessous (affiché dans la salle de cours) en indiquant le numéro du deuxième cas traité.

- Vous devrez ensuite préparer un beamer pour le premier cas proposé et vous le présenterez à l'oral à une date précisée ultérieurement.

groupe	Cas étudiés	Noms
1		- - - -
2		- - - -
3		- - - -
4		- - - -
5		- - - -
6		- - - -
7		- - - -
8		- - - -
9		- - - -
10		- - - -
11		- - - -
12		- - - -