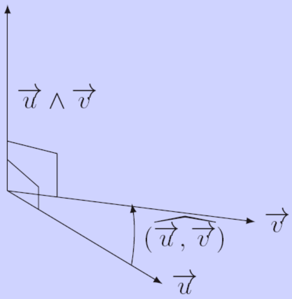
Produit vectoriel

1-Définition :

Définition

Le **produit vectoriel** des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est un ***vecteur*** noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ dont les caractéristiques sont les suivantes :

- la direction est orthogonale à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$, c'est-à-dire au plan défini par $\vec{u}$ et $\vec{v}$
- le sens est donné par la **règle des trois doigts de la main droite** : le pouce est selon $\vec{u}$, l'index selon $\vec{v}$, alors le sens de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est donné par le majeur
  ou par la **règle du tire-bouchon** : on « visse » selon le sens qui amène le vecteur $\vec{u}$ vers le vecteur $\vec{v}$ et on progresse selon le sens de $\vec{u} \wedge \vec{v}$.
- la norme est $\left\|\vec{u} \wedge \vec{v}\right\| = \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\| \times \left|\sin\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right)\right|$



Attention

Il faut faire très attention à l'ordre des vecteurs lors du calcul d'un produit vectoriel.

Erreur à ne pas commettre

Le **produit vectoriel** de deux vecteurs est un **vecteur**
Le **produit scalaire** de deux vecteurs est un **scalaire** !

2-Quelques propriétés et formules :

- Le produit vectoriel est **antisymétrique** $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
- Le produit vectoriel est **bilinéaire** $\left(\lambda\vec{A} + \mu\vec{B}\right) \wedge \vec{C} = \lambda\vec{A} \wedge \vec{C} + \mu\vec{B} \wedge \vec{C}$ et $\vec{C} \wedge \left(\lambda\vec{A} + \mu\vec{B}\right) = \lambda\vec{C} \wedge \vec{A} + \mu\vec{C} \wedge \vec{B}$
- Le produit vectoriel est **distributif** $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$
- **Double produit vectoriel** : $\boxed{\vec{u} \wedge \left(\vec{v} \wedge \vec{w}\right) = \left(\vec{u} \cdot \vec{w}\right)\vec{v} - \left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right)\vec{w}}$
- **Dérivée d'un produit vectoriel** : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}\left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}}$

3-Calculs de produits vectoriels utiles

a)Produit vectoriel de vecteurs d'une base orthonormée (BON)

Dans une base cartésienne $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$

$$\vec{u}_x \wedge \vec{u}_y = \vec{u}_z \ ; \ \vec{u}_y \wedge \vec{u}_z = \vec{u}_x \ ; \ \vec{u}_z \wedge \vec{u}_x = \vec{u}_y$$

$$\vec{u}_y \wedge \vec{u}_x = -\vec{u}_z \ ; \ \vec{u}_z \wedge \vec{u}_y = -\vec{u}_x \ ; \ \vec{u}_x \wedge \vec{u}_z = -\vec{u}_y$$

Dans une base cylindrique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$

$$\vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta = \vec{u}_z \;;\; \vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_z = \vec{u}_r \;;\; \vec{u}_z \wedge \vec{u}_r = \vec{u}_\theta$$

$$\vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_r = -\vec{u}_z \;;\; \vec{u}_z \wedge \vec{u}_\theta = -\vec{u}_r \;;\; \vec{u}_r \wedge \vec{u}_z = -\vec{u}_\theta$$

b)Expression :

Soient $\vec{w} = w_x\vec{u_x} + w_y\vec{u_y} + w_z\vec{u_z}$ et $\vec{v} = v_x\vec{u_x} + v_y\vec{u_y} + v_z\vec{u_z}$

Le produit vectoriel de $\vec{w}$ par $\vec{v}$: $\vec{w} \wedge \vec{v} = (w_x\vec{u_x} + w_y\vec{u_y} + w_z\vec{u_z}) \wedge (v_x\vec{u_x} + v_y\vec{u_y} + v_z\vec{u_z})$

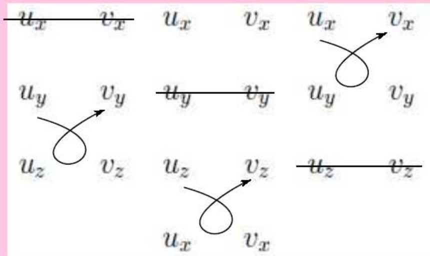
$$\begin{aligned} \vec{w} \wedge \vec{v} &= w_x\vec{u_x} \wedge v_x\vec{u_x} + w_x\vec{u_x} \wedge v_y\vec{u_y} + w_x\vec{u_x} \wedge v_z\vec{u_z} \\ &+ w_y\vec{u_y} \wedge v_x\vec{u_x} + w_y\vec{u_y} \wedge v_y\vec{u_y} + w_y\vec{u_y} \wedge v_z\vec{u_z} \\ &+ w_z\vec{u_z} \wedge v_x\vec{u_x} + w_z\vec{u_z} \wedge v_y\vec{u_y} + w_z\vec{u_z} \wedge v_z\vec{u_z} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} \vec{w} \wedge \vec{v} &= \vec{0} + w_xv_y\vec{u_z} + (-w_xv_z\vec{u_y}) \\ &+ (-w_yv_x\vec{u_z}) + \vec{0} + w_yv_z\vec{u_x} \\ &+ w_zv_x\vec{u_y} + (-w_zv_y\vec{u_x}) + \vec{0} \end{aligned}$$

D'où, en regroupant, $\vec{w} \wedge \vec{v} = (w_yv_z - w_zv_y)\vec{u_x} + (w_zv_x - w_xv_z)\vec{u_y} + (w_xv_y - w_yv_x)\vec{u_z}$

Ce qui s'obtient beaucoup plus simplement et rapidement avec le moyen mnémotechnique suivant :

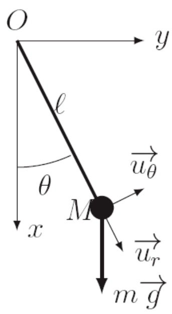
À connaître : Moyen mnémotechnique



$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_yv_z - u_zv_y \\ u_zv_x - u_xv_z \\ u_xv_y - u_yv_x \end{vmatrix}$$

Exercice :

1. Que vaut $\left(\vec{v} \wedge \vec{B}\right) \cdot \vec{v}$?
2. Que vaut $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}$ lorsque $\overrightarrow{OM} = r\vec{u_r}$ et $\vec{f} = f\vec{u_r}$?
3. Calculer le produit vectoriel de $\overrightarrow{OM} = r\vec{u_r}$ avec $\vec{v} = \dot{r}\vec{u_r} + \dot{\theta}\vec{u_\theta}$, $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u_z})$ formant une base orthonormée directe.
4. Calculer le produit vectoriel de $\overrightarrow{OM} = r\vec{u_r}$ avec $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$, où $\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{u_\theta}$. $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u_z})$ formant une base orthonormée directe.
5. Calculer le produit vectoriel de $\vec{v} \wedge \vec{B}$, où $\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{u_\theta}$ et $\vec{B} = B\vec{u_z}$, où $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u_z})$ formant une base orthonormée directe.



6. On considère la situation ci-contre.
   Le vecteur $m\vec{g}$ est un vecteur de norme mg.
   Déterminer l'expression du produit vectoriel $\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{g}$.