Fiche n° 12. Approche énergétique en mécanique

Réponses

12.1 .... $\boxed{\text{c}}$

12.2 a) .... $\boxed{mg(\ell - y)}$

12.2 b) .... $\boxed{mg(x\sin(\alpha) - H)}$

12.2 c) .... $\boxed{-mgR\cos(\theta)}$

12.2 d) .... $\boxed{mgr\big(\cos(\psi) - 1\big) + E_0}$

12.3 .... $\boxed{\text{b}}$

12.4 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}k(y-\ell_0)^2 - \dfrac{k{\ell_0}^2}{2}}$

12.4 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}k\left(\dfrac{x}{\cos(\beta)} - \ell_0\right)^2 - \dfrac{1}{2}k\left(\dfrac{L}{\sin(\beta)} - \ell_0\right)^2}$

12.4 c) .... $\boxed{E_0 + k(x-\ell_0)^2}$

12.5 a) .... $\boxed{-h\ell}$

12.5 b) .... $\boxed{-hR\alpha}$

12.5 c) .... $\boxed{-(2a+2b)h}$

12.5 d) .... $\boxed{-(a+b+c)h}$

12.5 e) .... $\boxed{\text{b}}$

12.6 .... $\boxed{\text{c}}$

12.7 a) .... $\boxed{1 - \dfrac{{v_0}^2}{2g\ell}}$

12.7 b) .... $\boxed{0{,}65\,\text{rad} = 37°}$

12.8 a) .... $\boxed{5{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$

12.8 b) .... $\boxed{0{,}11\,\text{m}}$

12.8 c) .... $\boxed{2{,}0\,\text{m}}$

12.9 a) .... $\boxed{\ddot{z} + \dfrac{\alpha}{m}\dot{z} + \dfrac{k}{m}z = g + \dfrac{k\ell_0}{m}}$

12.9 b) .... $\boxed{\zeta + \dfrac{\alpha}{m}\dot{\zeta} + \dfrac{k}{m}\zeta = 0}$

12.10 a) .... $\boxed{\text{b}}$

12.10 b) .... $\boxed{\text{d}}$

12.10 c) .... $\boxed{\text{a}}$

12.10 d) .... $\boxed{\text{c}}$

12.11 a) .... $\boxed{0}$

12.11 b) .... $\boxed{0}$

12.11 c) .... $\boxed{0}$

12.11 d) .... $\boxed{a}$

12.12 a) .... $\boxed{\text{a}}$

12.12 b) .... $\boxed{\text{a}}$

12.12 c) .... $\boxed{\text{a}}$

12.12 d) .... $\boxed{\text{b}}$

12.12 e) .... $\boxed{\text{b}}$

12.12 f) .... $\boxed{\text{b}}$

12.13 a) .... $\boxed{\text{a, c et d}}$

12.13 b) .... $\boxed{\text{b}}$

12.13 c) .... $\boxed{\text{a, c et d}}$

12.13 d) .... $\boxed{\text{a et c}}$

12.14 .... $\boxed{33{,}6\,\text{m/s}}$

Corrigés

12.2 a) L'axe est ici orienté vers le bas, on a donc $E_{pp}(y) = -mgy + K_1$. On veut $E_{pp}(\ell) = 0$, d'où $K_1 = mg\ell$. Finalement, on a $E_{pp}(y) = mg(\ell - y)$.

12.2 b) On peut raisonner de deux manières :

- La coordonnée verticale (axe de $\vec{g}$) z est liée à x par $z = x\sin(\alpha)$. On a donc $E_{pp} = mgx\sin(\alpha) + K_2$. L'énergie potentielle étant nulle en $z = H$, on a $E_{pp}(x) = mg(x\sin(\alpha) - H)$.
- Dans le repère $(\mathrm{O}, \vec{e_x}, \vec{e_y})$, on a $\vec{g} = -g\sin(\alpha)\vec{e_x} - g\cos\alpha\vec{e_y}$.
  On en déduit le travail élémentaire pour un déplacement selon x :
  $$\delta W = -mg\sin(\alpha)\,\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}(mgx\sin(\alpha) + K_2) = -\,\mathrm{d}E_{pp}.$$
  On en déduit que $E_{pp}(x) = mgx\sin(\alpha) + K_2$.
  L'énergie potentielle devant être nulle en S, qui correspond à $x = \dfrac{H}{\sin(\alpha)}$, on a $K_2 = -mgH$, d'où le résultat.

12.2 c) Dans la base polaire, l'accélération de la pesanteur s'écrit $\vec{g} = g\cos(\theta)\vec{e_r} - g\sin(\theta)\vec{e_\theta}$. Donc, le travail élémentaire pour un déplacement sur le cercle (selon $\vec{e_\theta}$) est

$$\delta W = m\vec{g}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = -mg\sin(\theta)R\,\mathrm{d}\theta = -\,\mathrm{d}(-mgR\cos(\theta) + K_3) = -\,\mathrm{d}E_{pp}.$$

On a donc $E_{pp}(\theta) = -mgR\cos(\theta) + K_3$, et comme on veut $E_{pp}(\pi/2) = 0$, on a $K_3 = 0$. Ainsi, on a

$$E_{pp}(\theta) = -mgR\cos(\theta).$$

12.2 d) Fixons un axe $(\mathrm{O}z)$ vertical ascendant avec O au centre du cercle. L'énergie potentielle de pesanteur s'écrit alors $E_{pp} = mgz + K_4$. Or, on a $z = r\cos(\psi)$ d'où $E_{pp} = mgr\cos(\psi) + K_4$.

La convention choisie ($E_{pp}(\psi = 0) = E_0$) entraîne que

$$mgr\cos(0) + K_4 = E_0 \quad \text{d'où} \quad K_4 = E_0 - mgr.$$

Finalement, on trouve

$$E_{pp} = mgr\Big(\cos(\psi) - 1\Big) + E_0.$$

12.4 a) L'axe est orienté vers le bas, la longueur du ressort s'identifie donc directement à la coordonnée y.

La force de rappel s'écrit $\vec{F} = -k(y - \ell_0)\vec{e_y}$. On en déduit donc (en calculant le travail élémentaire ou par intégration directe) que

$$E_{pe}(y) = \frac{1}{2}k(y - \ell_0)^2 + \mathrm{C^{te}}.$$

Or, on veut $E_{pe}(y = 0) = 0$, d'où $\mathrm{C^{te}} = -\dfrac{1}{2}k{\ell_0}^2$. Ainsi, on a

$$E_{pe}(y) = \frac{1}{2}k(y - \ell_0)^2 - \frac{1}{2}k{\ell_0}^2.$$

12.4 b) On calcule d'abord la longueur ℓ du ressort en fonction de la coordonnée x. Un peu de trigonométrie donne $\cos(\beta) = \frac{x}{\ell}$ d'où $\ell = \frac{x}{\cos(\beta)}$. Par rapport à la coordonnée ℓ (mesurée le long de l'axe (OA)), l'énergie potentielle vaut donc :

$$E_{pe}(\ell) = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 + \mathrm{C}^{\mathrm{te}}.$$

On a donc

$$E_{pe}(x) = \frac{1}{2}k\left(\frac{x}{\cos(\beta)} - \ell_0\right)^2 + \mathrm{C}^{\mathrm{te}}.$$

On détermine alors la constante afin d'avoir $E_{pe}(\mathrm{A}) = 0$. Lorsque le point M est en A, la longueur du ressort vaut $\ell(\mathrm{A}) = \frac{L}{\sin(\beta)}$. On résout donc :

$$E_{pe}(\ell(\mathrm{A})) = \frac{1}{2}k\left(\frac{L}{\sin(\beta)} - \ell_0\right)^2 + \mathrm{C}^{\mathrm{te}} = 0 \quad \text{ce qui donne} \quad \mathrm{C}^{\mathrm{te}} = -\frac{1}{2}k\left(\frac{L}{\sin(\beta)} - \ell_0\right)^2.$$

Finalement, on trouve

$$E_{pe}(x) = \frac{1}{2}k\left(\frac{x}{\cos(\beta)} - \ell_0\right)^2 - \frac{1}{2}k\left(\frac{L}{\sin(\beta)} - \ell_0\right)^2.$$

12.4 c) La masse centrale est soumise aux forces de rappel des deux ressorts :

- La longueur du ressort de gauche vaut x. La force exercée par celui-ci sur la masse s'exprime donc comme $\vec{F_g} = -k(x - \ell_0)\vec{e_x}$, d'où une énergie potentielle (à une constante près) $E_{p,g} = \frac{1}{2}k(x - \ell_0)^2$.
- La longueur du ressort de droite vaut $2\ell_0 - x$. La force exercée par celui-ci sur la masse s'exprime donc comme $\vec{F_d} = k(2\ell_0 - x - \ell_0)\vec{e_x} = k(\ell_0 - x)\vec{e_x}$ (attention au signe devant k qui doit être cohérent), d'où une énergie potentielle (à une constante près) $E_{p,d} = \frac{1}{2}k(\ell_0 - x)^2$.

En additionnant les deux contributions, et en demandant que $E_{pe}(\ell_0) = E_0$, on obtient alors $E_{pe}(x) = E_0 + k(x - \ell_0)^2$.

12.5 a) Déterminons le travail élémentaire : on a

$$\delta W = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = -\frac{h}{||\vec{v}||}\vec{v} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}.$$

Or, par construction, les vecteurs vitesse et déplacement élémentaire sont colinéaires, d'où :

$$\delta W = -h\,\mathrm{dOM}.$$

Par intégration, on a donc

$$W = \int_{\mathrm{AB}} -h\,\mathrm{dOM} = -h\int_{\mathrm{AB}} \mathrm{dOM} = -h\ell.$$

Les autres cas se calculent semblablement.

12.5 e) Si la force était conservative, son travail ne dépendrait que des points de départ et d'arrivée, et serait donc nul sur un chemin fermé (points de départ et d'arrivée confondus). Ce n'est pas le cas pour les chemin c) et d), la force n'est donc pas conservative.

12.6 On applique le théorème de l'énergie cinétique entre le point de départ et le point d'arrêt. L'entraînement précédent permet d'affirmer que le travail de la force de frottement vaut $-hd$. On a donc :

$$\Delta E_c = 0 - \frac{1}{2}m{v_0}^2 = -hd \qquad \text{donc} \qquad d = \frac{m{v_0}^2}{2h}.$$

12.7 a) La masse n'est soumise qu'au poids, force conservative, et à la tension du fil qui ne travaille pas car elle reste orthogonale au mouvement. L'énergie mécanique se conserve donc entre le point de départ et le point de rebroussement.

- Au départ, $E_m = E_c = \frac{1}{2}m{v_0}^2$ (on pose $z = 0$ pour la position initiale de la masse, et on prend $E_p(0) = 0$)
- Au moment du rebroussement, $E_m = E_p = mgz(\theta_0) = mg\ell(1 - \cos(\theta_0))$, car on a alors $z(\theta) = \ell - \ell\cos(\theta)$.

Ainsi, on a

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 = mg\ell(1 - \cos(\theta_0)) \qquad \text{donc} \qquad \cos(\theta_0) = 1 - \frac{{v_0}^2}{2g\ell}.$$

....

12.8 a) En appliquant le théorème de l'énergie mécanique entre le début et la fin de la chute libre on a :

$$E_m(t_{\text{fin chute}}) - E_m(t_{\text{début chute}}) = \frac{1}{2}m{v_0}^2 - mg(H - \ell_0).$$

Les forces étant conservatives, l'énergie mécanique est conservée et on a donc

$$v_0 = \sqrt{2g(H - \ell_0)} = \sqrt{2 \times 9{,}81\,\mathrm{m \cdot s^{-2}} \times (2{,}0\,\mathrm{m} - 0{,}30\,\mathrm{m})} = 5{,}8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

....

12.8 b) La masse n'est soumise qu'à des forces conservatives : son poids, ainsi que la force de rappel du ressort. On peut donc appliquer la conservation de l'énergie mécanique entre la position d'arrivée sur le ressort $z = \ell_0$, et la position d'altitude minimale $z = z_m$ (pour laquelle la vitesse s'annule). On a donc

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 + mg\ell_0 = mgz_m + \frac{1}{2}k(z_m - \ell_0)^2.$$

Ainsi, après calcul, on trouve $\frac{1}{2}kz_m^2 + (mg - k\ell_0)z_m + \frac{1}{2}k{\ell_0}^2 - \frac{1}{2}m{v_0}^2 - mg\ell_0 = 0$.

On ne demande qu'une réponse numérique, on peut donc passer aux valeurs numériques pour simplifier la résolution :

$$500z_m^2 - 290{,}2z_m + 25{,}4 = 0.$$

Cette équation possède deux solutions, $z_1 \approx 0{,}47\,\mathrm{m}$ et $z_2 \approx 0{,}11\,\mathrm{m}$. La première solution correspond à une position supérieure en altitude à la position initiale, et n'est donc pas celle qui nous intéresse. On retient donc $z_m = 0{,}11\,\mathrm{m}$.

....

12.8 c) La masse n'étant soumise qu'à des forces conservatives, elle revient en $x = \ell_0$ avec la même vitesse qu'elle avait en arrivant, à savoir v_0. Elle atteint donc une altitude maximale quand sa vitesse s'annule en $z = H$.

....

12.9 a) On choisit un axe vertical descendant de manière à pouvoir identifier z à la distance OM, qui est la longueur du ressort.

Afin de déterminer l'équation différentielle, on souhaite appliquer le théorème de la puissance cinétique. Or,

- la puissance du poids vaut $m\vec{g} \cdot \vec{v} = mg\dot{z}$ (axe descendant) ;
- la puissance de la force de rappel vaut $-k(z - \ell_0)\vec{e_z} \cdot \vec{v} = -k(z - \ell_0)\dot{z}$;
- la puissance de la force de frottements fluides vaut $-\alpha\vec{v} \cdot \vec{v} = -\alpha\dot{z}^2$.

Le théorème de la puissance cinétique donne alors :

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\dot{z}^2\right) = m\dot{z}\ddot{z} = mg\dot{z} - k(z - \ell_0)\dot{z} - \alpha\dot{z}^2.$$

D'où finalement : $\ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = g + \frac{k\ell_0}{m}$.

12.9 b) On détermine la position d'équilibre en projetant la première loi de Newton sur l'axe vertical descendant :

$$mg - k(z_{\text{eq}} - \ell_0) = 0 \quad \text{donc} \quad z_{\text{eq}} = \ell_0 + \frac{mg}{k}.$$

On obtient $z_{\text{eq}} > \ell_0$, ce qui est physiquement cohérent.

On pose donc $\zeta = z - z_{\text{eq}}$. En réinjectant dans l'équation différentielle obtenue précédemment, on obtient :

$$\ddot{\zeta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\zeta} + \frac{k}{m}\left(\zeta + \ell_0 + \frac{mg}{k}\right) = g + \frac{k\ell_0}{m} \qquad \text{donc} \qquad \ddot{\zeta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\zeta} + \frac{k}{m}\zeta = 0.$$

On peut également obtenir cette équation en écrivant la force de rappel par rapport à la variable ζ et en en déduisant l'énergie potentielle associée.

12.10 a) Au voisinage de $x = 0^+$, la fonction énergie potentielle est équivalente à β/x^2. Ici, la fonction représentée par le graphe tend vers $-\infty$ en 0, on a nécessairement $\beta < 0$.

Pour $x \to +\infty$, la fonction énergie potentielle est équivalente à α/x. Ici, la fonction représentée par le graphe tend vers 0^+ en $+\infty$, on a nécessairement $\alpha > 0$.

Ce potentiel est physiquement impossible car $E_p(x \to 0^+) \longrightarrow -\infty$: l'énergie potentielle n'est pas bornée inférieurement, on pourrait donc théoriquement utiliser ce potentiel pour extraire une quantité infinie d'énergie.

12.11 a) La position d'équilibre stable correspond à l'état qui minimise l'énergie potentielle.

- Déterminons le minimum de l'énergie potentielle $E_p(\theta) = mg\ell(1 - \cos(\theta))$ en cherchant la valeur θ_{eq} telle que

  $$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}\theta}(\theta_{\text{eq}}) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}\theta^2}(\theta_{\text{eq}}) > 0.$$

  La première égalité donne $\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}\theta}(\theta_{\text{eq}}) = mg\ell\sin(\theta_{\text{eq}}) = 0$ et donc $\theta_{\text{eq}} \equiv 0\ [\pi]$.

  Finalement, en tenant compte de $\dfrac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}\theta^2}(\theta_{\text{eq}}) > 0$, on trouve $\theta_{\text{eq}} \equiv 0\ [2\pi]$.

- On aurait pu remarquer que les minima de $mg\ell(1-\cos(\theta))$ correspondent aux maxima de $\cos(\theta)$, qui sont bien les $\theta_{\text{eq}} \equiv 0\ [2\pi]$.

12.11 b) On dérive l'énergie potentielle, en écrivant :

$$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}z} = \kappa z + \lambda z^3.$$

L'équation $\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}z} = 0$ a alors trois solutions : $z_1 = 0$, $z_2 = \sqrt{-\dfrac{\kappa}{\lambda}}$ et $z_3 = -\sqrt{-\dfrac{\kappa}{\lambda}}$.

Il s'agit des positions d'équilibre de ce potentiel.

On dérive une seconde fois afin d'étudier la stabilité. On a $\dfrac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}z^2} = \kappa + 3\lambda z^2$.

Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}z^2}(z = z_1) &= \kappa > 0 \\
\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}z^2}(z = z_2) &= \kappa + 3\lambda\left(-\frac{\kappa}{\lambda}\right) = -2\kappa < 0 \\
\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}z^2}(z = z_3) &= \kappa + 3\lambda\left(-\frac{\kappa}{\lambda}\right) = -2\kappa < 0.
\end{aligned}$$

Seule $z_1 = 0$ est une position d'équilibre stable.

12.11 c) On calcule la dérivée de l'énergie potentielle :

$$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} = 2U_0\beta x \mathrm{e}^{\beta x^2}$$

qui montre que $\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}$ s'annule pour $x = 0$, qui est donc une position d'équilibre.

Pour étudier sa stabilité, on dérive une seconde fois :

$$\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2} = 2U_0\beta(1 + 2\beta x^2)\mathrm{e}^{\beta x^2}$$

qui en $x = 0$ vaut $2U_0\beta > 0$. Cette position d'équilibre est donc bien stable.

....

12.11 d) On calcule la dérivée de l'énergie potentielle :

$$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}\phi} = 2E_0 \sin(\phi - a)\cos(\phi - a).$$

Ainsi, $\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}\phi}$ s'annule pour $\phi = a$ et $\phi = a + \frac{\pi}{2}$, qui sont les positions d'équilibre dans l'intervalle $[0, \pi[$.

Afin d'étudier leur stabilité, on dérive une seconde fois :

$$\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}\phi^2} = 2E_0(\cos^2(\phi - a) - \sin^2(\phi - a)).$$

- On calcule ensuite $\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}\phi^2}(\phi = a) = 2E_0$. Ce dernier terme étant positif, la position d'équilibre $\phi = a$ est donc stable.
- Pour l'autre position d'équilibre, on a $\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}\phi^2}(\phi = a + \pi/2) = -2E_0$. Cette dérivée seconde étant négative, la position d'équilibre $\phi = a + \pi/2$ est instable.

....

12.13 d) Le mouvement entre x_2 et x_3 correspond à un état lié : c'est un mouvement dans un puits de potentiel. Comme le mouvement est à un degré de liberté, il est également périodique. Cependant, les positions extrêmes étant éloignées de la position moyenne (d'équilibre x_3^*), ce mouvement n'est pas harmonique.

....

12.14 On a vu précédemment que les trajectoires correspondant à l'énergie mécanique E_3 sont des états de diffusion, le point matériel peut donc bien s'échapper à l'infini.

Le mouvement du point étant conservatif, on applique la conservation de l'énergie mécanique entre le départ et « l'arrivée » à l'infini : on a

$$E_3 = \frac{1}{2}mv_\infty^2 \qquad \text{donc} \qquad v_\infty = \sqrt{\frac{2E_3}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 1\,300\,\mathrm{kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}}}{2{,}3\,\mathrm{kg}}} = 33{,}6\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$