Approche énergétique en mécanique

Prérequis
Systèmes de coordonnées. Expression de forces (poids, force de rappel).
Travail d'une force. Théorèmes généraux (dynamique et énergétiques).

Énergies potentielles

Entraînement 12.1 — La juste formule.

On considère un point matériel de masse m plongé dans le champ de pesanteur $\vec{g}$. On se place dans un repère cartésien $(\mathrm{O}, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ tel que $\vec{g} = -g\vec{e_y}$, le point O étant pris comme origine de l'énergie potentielle. Quelle est l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur ?

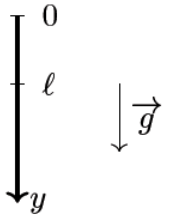
(a) mgx (b) $-mgy$ (c) mgy (d) mgz

. . . .

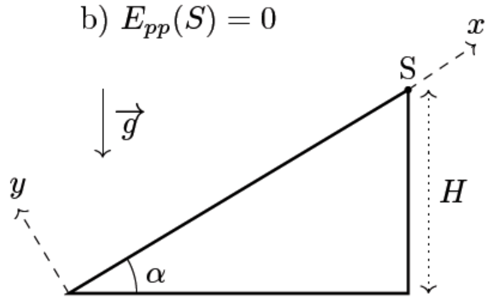
Entraînement 12.2 — Plusieurs expressions d'énergie potentielle de pesanteur.

Déterminer la fonction énergie potentielle de pesanteur d'un point matériel de masse m associée aux situations suivantes :

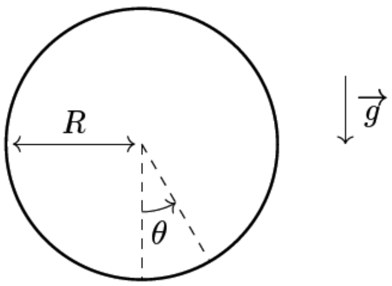
a) $E_{pp}(\ell) = 0$



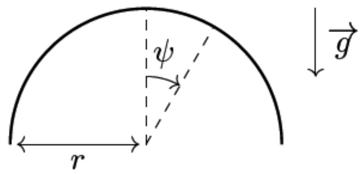
b) $E_{pp}(S) = 0$



c) $E_{pp}(\theta = \pi/2) = 0$



d) $E_{pp}(\psi = 0) = E_0$



a) $E_{pp}(y) =$ . . . .

b) $E_{pp}(x) =$ . . . .

c) $E_{pp}(\theta) =$ . . . .

d) $E_{pp}(\psi) =$ . . . .

Entraînement 12.3 — La juste formule... le retour.

On considère un point matériel M de masse m astreint à se déplacer selon un axe (Oy) horizontal. Il est attaché à un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. L'autre extrémité du ressort est fixée en O.

Quelle est l'expression de l'énergie potentielle élastique du point M pour que celle-ci soit nulle lorsque l'allongement du ressort est nul ?

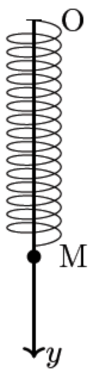
(a) $\dfrac{1}{2}ky^2$ (b) $\dfrac{1}{2}k(y-\ell_0)^2$ (c) $\dfrac{1}{2}k(y^2-{\ell_0}^2)$ (d) $-\dfrac{1}{2}k(\ell_0-y)^2$

....

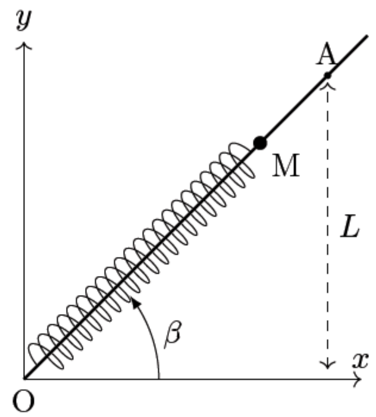
Entraînement 12.4 — Expression de l'énergie potentielle élastique.

Déterminer la fonction énergie potentielle élastique associée aux situations suivantes, où tous les ressorts sont de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k :

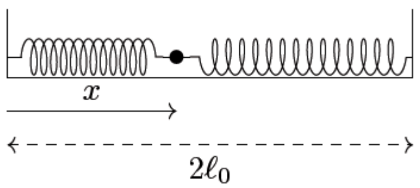
a) $E_{pe}(y=0)=0$



b) $E_{pe}(A)=0$



c) $E_{pe}(x=\ell_0)=E_0$



a) $E_{pe}(y) =$ ....

b) $E_{pe}(x) =$ ....

c) $E_{pe}(x) =$ ....

Travail d'une force

Entraînement 12.5 — Une force de frottement.

On considère le travail $W_{\mathrm{AB}} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$ d'une force de frottement $\vec{F} = -h\dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ où $\vec{v}$ est le vecteur vitesse du point matériel subissant la force et h est une constante.

Déterminer W pour les chemins suivants :

a) Un segment reliant $\mathrm{A}(0,0)$ et $\mathrm{B}(\ell,0)$ ....

b) Un arc de cercle d'angle α et de rayon R ....

c) Un rectangle ABCD de côtés a et b ....

d) Un triangle ABC de côtés a, b, c ....

e) En comparant les résultats obtenus, peut-on dire que la force est conservative ?

(a) Oui (b) Non

....

Théorèmes énergétiques

Entraînement 12.6 — Freinage et variation d'énergie cinétique.

On considère une voiture (assimilée à un point matériel de masse m) se déplaçant le long d'une route rectiligne horizontale et dont la vitesse initiale au début de la phase de freinage vaut $\vec{v} = v_0\vec{e_x}$.

En freinant, le véhicule est soumis à une force de frottement $\vec{F} = -h\vec{e_x}$.

Quelle est l'expression de la distance d'arrêt d de la voiture ?

(a) $\dfrac{2m{v_0}^2}{h}$ (b) $\dfrac{m{v_0}^2}{h}$ (c) $\dfrac{m{v_0}^2}{2h}$

....

Entraînement 12.7 — Pendule simple.

Un pendule simple est constitué d'un fil de longueur $\ell = 1{,}0\,\mathrm{m}$ auquel est accroché une masse $m = 100\,\mathrm{g}$.

À $t = 0$, on donne à cette masse une vitesse horizontale $\vec{v_0} = v_0\vec{e_x}$ où $v_0 = 2{,}0\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

On note θ_0 l'angle pour lequel la masse rebrousse chemin.

a) Exprimer $\cos(\theta_0)$ ....

b) Calculer θ_0 ....

Entraînement 12.8 — Trampoline simplifié.

Un ressort de longueur à vide *lo* = 30 cm, de raideur *k* = 1,0 · 10^3 N · m^{-1}, sans masse, est posé sur le sol à la verticale. On lâche d'une hauteur *H* = 2,0m et sans vitesse initiale une masse ponctuelle *m* = 1,0 kg.

Après une durée de chute libre sans frottement, la masse atteint le ressort, le comprime jusqu'à ce que celui-ci la propulse vers le haut comme le ferait un trampoline.

En admettant que la masse quitte le ressort quand *z* = *lo*, calculer :

a) La vitesse de la masse lors du contact avec le ressort

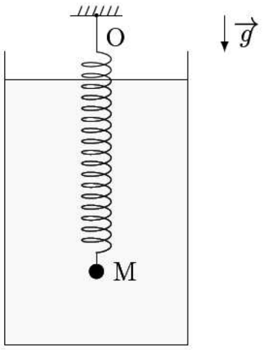
b) L'altitude minimale atteinte par la masse

c) L'altitude maximale de la masse (en fin de remontée)

Entraînement 12.9 — Oscillateur vertical.

Un point M de masse *m* est accroché à une paroi horizontale fixe par l'intermédiaire d'un ressort de raideur *k* et de longueur à vide *lo*. Son mouvement s'effectue dans un liquide qui produit une force de frottements fluides linéaire

$\vec{F} = -\alpha \vec{v}$, où $\alpha > 0$. On néglige la poussée d'Archimède, on ne considère que des mouvements verticaux dans le champ de pesanteur $\vec{g}$.



a) On note *z* la position de M par rapport à O.

Déterminer, par une méthode énergétique, l'équation différentielle vérifiée par *z*.

. . . .

b) On note à présent ζ la position de M par rapport à sa position à l'équilibre.

Déterminer l'équation différentielle vérifiée par ζ.

Mouvements conservatifs et positions d'équilibre

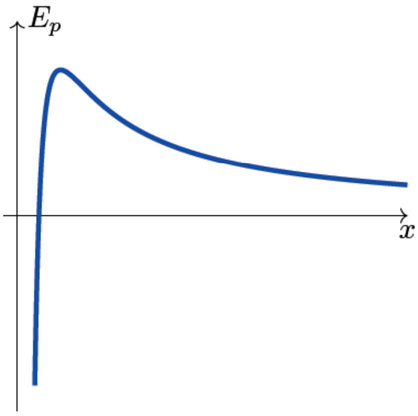
Entraînement 12.10 — Profils d'énergies potentielles.

Les quatre profils suivants représentent la fonction énergie potentielle

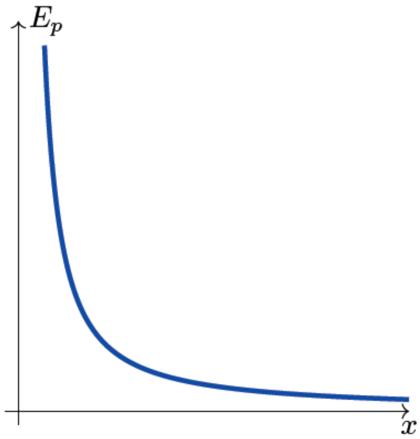
$$E_p(x) = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2}$$

avec α, β des réels non nuls.

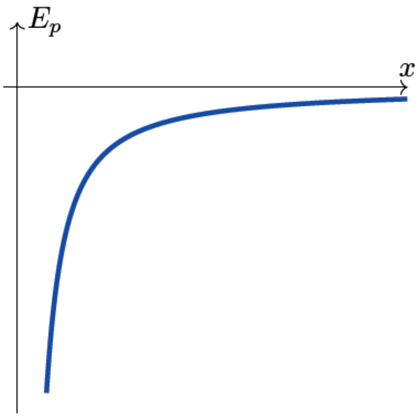
Énergie potentielle n° 1



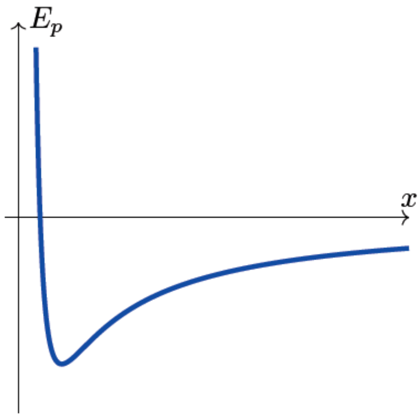
Énergie potentielle n° 3



Énergie potentielle n° 2



Énergie potentielle n° 4



Attribuer à chacune des figures ci-dessus les bons signes pour α et β, en indiquant laquelle des réponses suivantes est la bonne :

(a) $\alpha > 0$ et $\beta > 0$

(b) $\alpha > 0$ et $\beta < 0$

(c) $\alpha < 0$ et $\beta > 0$

(d) $\alpha < 0$ et $\beta < 0$

a) Énergie potentielle n° 1 . . . . ☐

b) Énergie potentielle n° 2 . . . . ☐

c) Énergie potentielle n° 3 . . . . ☐

d) Énergie potentielle n° 4 . . . . ☐

Entraînement 12.11 — Autour d'une position d'équilibre.

On donne l'expression de potentiels E_p dans chacun desquels évolue un point matériel de masse m.

Déterminer dans chaque cas la position d'équilibre stable.

a) Pour $E_p(\theta) = mg\ell(1 - \cos(\theta))$:

$\theta_{\text{eq}} =$ ....

b) Pour $E_p(z) = \dfrac{1}{2}\kappa z^2 + \dfrac{1}{4}\lambda z^4$ avec $\kappa > 0$ et $\lambda < 0$:

$z_{\text{eq}} =$ ....

c) Pour $E_p(x) = U_0\, \mathrm{e}^{\beta x^2}$ avec $U_0, \beta > 0$:

$x_{\text{eq}} =$ ....

d) Pour $E_p(\phi) = E_0 \sin^2(\phi - a)$ avec $E_0 > 0$, $\phi \in [0, \pi[$ et $a \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$:

$\phi_{\text{eq}} =$ ....

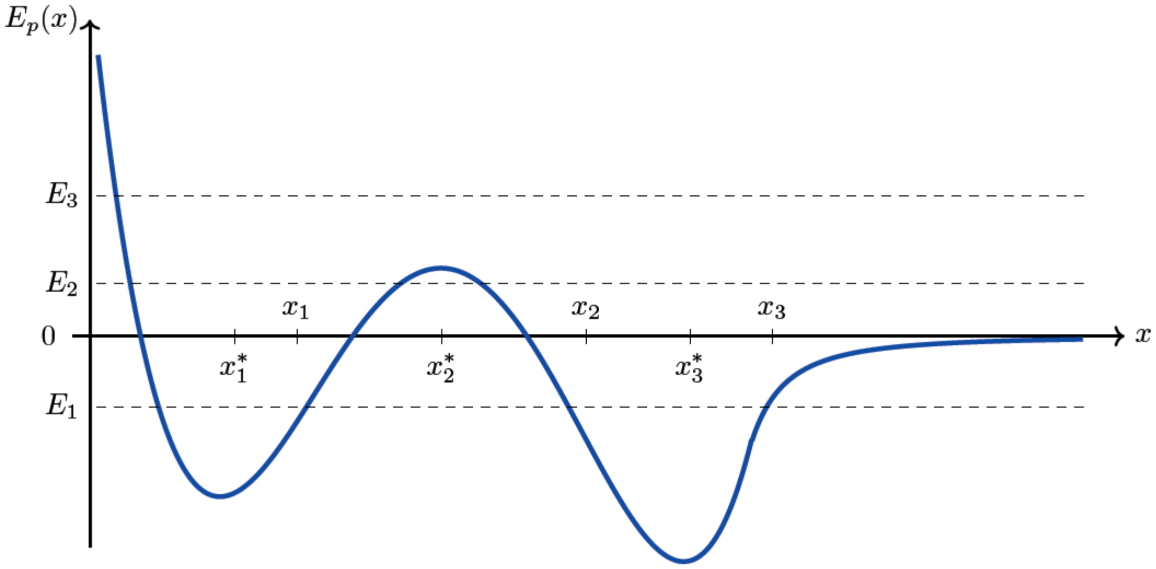
Entraînement 12.12 — État lié ou état de diffusion ?

On considère le profil suivant d'énergie potentielle (les abscisses étoilées et l'abscisse x_3 serviront dans l'entraînement suivant).

Pour chaque état suivant, étant donné les valeurs de l'énergie mécanique et de la position initiale d'un point matériel, dire si ce dernier se trouve :

(a) dans un état lié

(b) un état de diffusion.



a) $E_m = E_1$ et $x(0) = x_1$ ....

b) $E_m = E_1$ et $x(0) = x_2$ ....

c) $E_m = E_2$ et $x(0) = x_1$ ....

d) $E_m = E_2$ et $x(0) = x_2$ ....

e) $E_m = E_3$ et $x(0) = x_1$ ....

f) $E_m = E_3$ et $x(0) = x_2$ ....

Entraînement 12.13 — Analyse d'un profil d'énergie potentielle.

On reprend le profil d'énergie potentielle de l'entraînement précédent.

Pour chacune des positions suivantes, déterminer si elle est stable ou instable, et si le mouvement au voisinage de ces positions est périodique et/ou harmonique, en indiquant laquelle des réponses suivantes est la bonne.

(a) équilibre stable	(c) mouvement périodique
(b) équilibre instable	(d) mouvement harmonique

Plusieurs bonnes réponses sont possibles.

a) Voisinage de x_1^* ....

b) Voisinage de x_2^* ....

c) Voisinage de x_3^* ....

d) Région entre x_2 et x_3 ....

Entraînement 12.14 — Vitesse à l'infini.

On considère le profil d'énergie potentielle des deux entraînements précédents.

Un point matériel de masse $m = 2{,}30\,\mathrm{kg}$ est abandonné avec l'énergie $E_3 = 1{,}30\,\mathrm{kJ}$.

Calculer la vitesse du point matériel à l'infini ....

Réponses mélangées

(b) $1 - \dfrac{{v_0}^2}{2g\ell}$ (a) (b) 0 (b) $33{,}6\,\mathrm{m/s}$ (a), (c) et (d)

$-hR\alpha$ $mg(x\sin(\alpha) - H)$ $mg(\ell - y)$ $mgr\big(\cos(\psi) - 1\big) + E_0$ a

$\dfrac{1}{2}k\left(\dfrac{x}{\cos(\beta)} - \ell_0\right)^2 - \dfrac{1}{2}k\left(\dfrac{L}{\sin(\beta)} - \ell_0\right)^2$ $0{,}65\,\mathrm{rad} = 37°$ (a) et (c) $0{,}11\,\mathrm{m}$ (a) 0

(b) $E_0 + k(x - \ell_0)^2$ (c) $\zeta + \dfrac{\alpha}{m}\dot\zeta + \dfrac{k}{m}\zeta = 0$ (c) $\dfrac{1}{2}k(y - \ell_0)^2 - \dfrac{k{\ell_0}^2}{2}$ $-h\ell$

$5{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ $\ddot z + \dfrac{\alpha}{m}\dot z + \dfrac{k}{m}z = g + \dfrac{k\ell_0}{m}$ (a) $2{,}0\,\mathrm{m}$ (a) 0 (a), (c) et (d)

(b) $-(a + b + c)h$ $-mgR\cos(\theta)$ (d) (c) (b) (b) $-(2a + 2b)h$