Principe fondamental de la dynamique

Prérequis
Projections. Coordonnées polaires. Équations différentielles simples.

Pour commencer

Entraînement 11.1 — Une relation algébrique.

La vitesse v (en régime permanent) d'un mobile vérifie l'équation

$$m_1(v - v_1) + m_2(v - v_2) = p.$$

Donner l'expression de v (en fonction de m_1, m_2, v_1, v_2 et p) ....

Entraînement 11.2 — Un système de deux équations.

Un problème de mécanique fait intervenir une force d'intensité F et un angle $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. En projetant la seconde loi de Newton sur deux axes, on aboutit au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} T + F\sin\alpha = mR\omega^2 \\ F\cos\alpha = mg. \end{cases}$$

a) Déterminer F en fonction des données T, m, R, ω et g. ....

b) Déterminer α en fonction des données T, m, R, ω et g. ....

Entraînement 11.3 — Quelques équations différentielles.

Résoudre les équations différentielles suivantes, sachant que $v = 0$ à $t = t_0$, et que les paramètres a_0 et k sont des constantes.

a) $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a_0$ ....

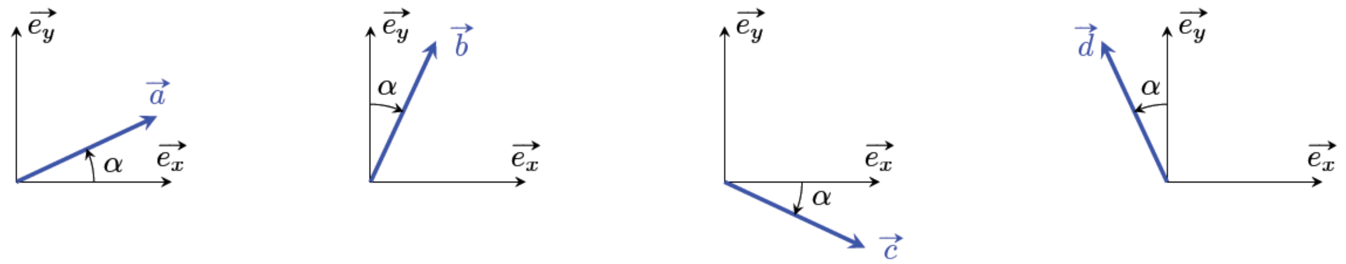
b) $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -kv$ ....

c) $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -kv + a_0$ ....

Décomposition de vecteurs

Entraînement 11.4 — Des projections.

On considère les vecteurs suivants :



Décomposer dans la base $(\vec{e_x}, \vec{e_y})$ les vecteurs :

a) $\vec{a}$ ....

b) $\vec{b}$ ....

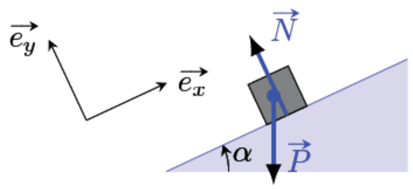
c) $\vec{c}$ ....

d) $\vec{d}$ ....

Entraînement 11.5 — Sur un plan incliné.

On considère la situation représentée ci-contre.

Décomposer dans la base $(\vec{e_x}, \vec{e_y})$ les vecteurs suivants.

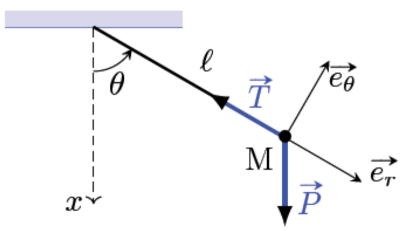


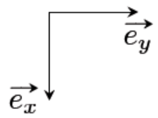
a) $\vec{P}$ ....

b) $\vec{N}$ ....

Entraînement 11.6 — Avec un pendule simple.

On considère la situation





Décomposer dans la base $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ les vecteurs suivants :

a) $\vec{P}$ ....

b) $\vec{T}$ ....

c) $\vec{P} + \vec{T}$ ....

Entraînement 11.7 — **Avec un pendule simple (suite).**

On se place dans la même situation que ci-dessus. Décomposer dans la base $(\vec{e_x}, \vec{e_y})$:

a) $\vec{P}$ ....

b) $\vec{T}$ ....

c) $\vec{P} + \vec{T}$ ....

Entre accélération et position

Entraînement 11.8 — **Du vecteur position au vecteur accélération.**

On considère un point M en mouvement dont les coordonnées cartésiennes dans la base $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ sont, à chaque instant $x(t) = \dfrac{1}{2}a_0t^2 + x_0$, $y(t) = -v_0t$ et $z(t) = z_0$.

Donner les expressions du vecteur :

a) position ......

b) vitesse ....

c) accélération ..

Entraînement 11.9 — **Du vecteur accélération au vecteur position.**

On considère un point M de masse m en chute libre soumis à son poids $\vec{P} = mg\vec{e_z}$. Ce point M a été lancé avec une vitesse initiale $\vec{v_0} = v_0\vec{e_x}$ et une position initiale $\mathrm{M}_0\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Donner l'expression des vecteurs :

a) accélération ....

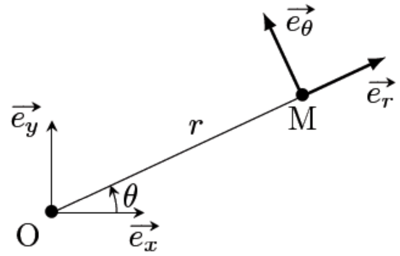
b) vitesse ....

c) position ....

Autour des coordonnées polaires

Dans ce paragraphe, on considère un point M repéré par la distance r et l'angle θ en coordonnées polaires. La distance r et l'angle θ dépendent du temps t : le point M est mobile.

On représente la situation par le schéma ci-contre.



Entraînement 11.10 — Trois calculs fondamentaux.

Décomposer dans la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$ les vecteurs :

a) $\overrightarrow{e_r}$ ....

b) $\overrightarrow{e_\theta}$ ....

En déduire (en dérivant) l'expression dans la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$ des vecteurs :

c) $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_r}}{\mathrm{d}t}$ ....

d) $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_\theta}}{\mathrm{d}t}$ ....

En déduire l'expression, dans la base $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$, des vecteurs :

e) $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_r}}{\mathrm{d}t}$ ....

f) $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_\theta}}{\mathrm{d}t}$ ....

Entraînement 11.11 — Vecteur position en coordonnées polaires.

Comment s'exprime le vecteur position $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ en coordonnées polaires ?

(a) $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\overrightarrow{e_r} + \theta\overrightarrow{e_\theta}$ (b) $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\overrightarrow{e_r} + \dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$ (c) $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\overrightarrow{e_r}$ (d) $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \theta\overrightarrow{e_\theta}$

....

Entraînement 11.12 — Accélération en coordonnées polaires.

Déduire de ce qui précède l'expression, en fonction de $\overrightarrow{e_r}$ et de $\overrightarrow{e_\theta}$:

a) du vecteur vitesse $\vec{v}$ ....

b) du vecteur accélération $\vec{a}$ ....

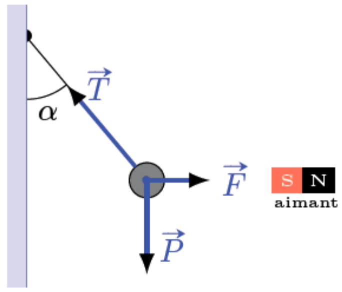
Étude de systèmes en équilibre

Entraînement 11.13 — **Tension d'un fil.**

Une bille d'acier de poids $P = 2{,}0\,\mathrm{N}$, fixée à l'extrémité d'un fil de longueur $\ell = 50\,\mathrm{cm}$ est attirée par un aimant exerçant une force $F = 1{,}0\,\mathrm{N}$. À l'équilibre, le fil s'incline d'un angle α et l'on a

$$\vec{T} + \vec{F} + \vec{P} = \vec{0},$$

où $\vec{T}$ est la tension exercée par le fil.



Calculer les valeurs numériques de :

a) la tension T du fil ....

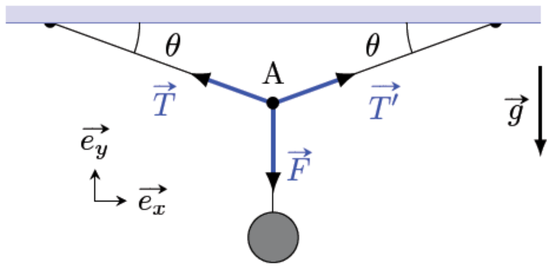
b) l'angle α (en radian) ....

Entraînement 11.14 — **Masse suspendue.**

Un objet qui pèse $800\,\mathrm{N}$ est suspendu en équilibre à l'aide de deux cordes symétriques qui font un angle $\theta = 20°$ avec la direction horizontale.

Le point A est soumis à trois forces :

$$\vec{T}, \vec{T'} \text{ et } \vec{F}.$$



On note $\vec{R}$ la résultante des forces.

a) Exprimer la composante horizontale R_x en fonction de T, T' et θ. ....

b) Exprimer la composante verticale R_y en fonction de T, T', F et θ. ....

c) Déterminer la tension T en résolvant l'équation $\vec{R} = \vec{0}$. ....

Mouvements rectilignes

Entraînement 11.15 — **Chute avec frottement.**

Un corps de masse $m = 2\,\mathrm{kg}$ tombe verticalement avec une accélération de $a = 9\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Lors de sa chute il subit la force de pesanteur ainsi qu'une force de frottement due à l'air.

On prendra $g = 9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ pour l'intensité du champ de pesanteur.

Combien vaut l'intensité de la force de frottement ? ....

Entraînement 11.16 — **Contact dans un ascenseur.**

Un homme de masse $m = 80\,\text{kg}$ est dans un ascenseur qui monte avec une accélération $a = 1\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. On note $\vec{F}$ la force exercée par l'homme sur le plancher de l'ascenseur.

On prendra $g = 9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ pour l'intensité du champ de pesanteur.

Combien vaut l'intensité de $\vec{F}$? ....

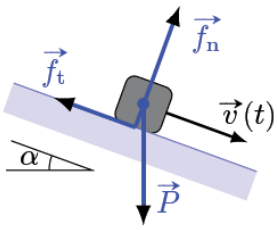
Entraînement 11.17 — **Calcul d'une action de contact.**

Un bloc de masse m, de poids $\vec{P}$ glisse à une vitesse $v(t)$, variable au cours du temps, sur un support plan qui exerce une action de contact.

Celle-ci se décompose en deux actions :

- une action normale à la surface $\vec{f_\text{n}}$;
- une action de frottement $\vec{f_\text{t}}$ opposée à la vitesse de glissement.

Le plan est incliné d'un angle α, comme figuré ci-dessous.



Déterminer (en fonction d'au moins une des données P, $v(t)$, m et α) :

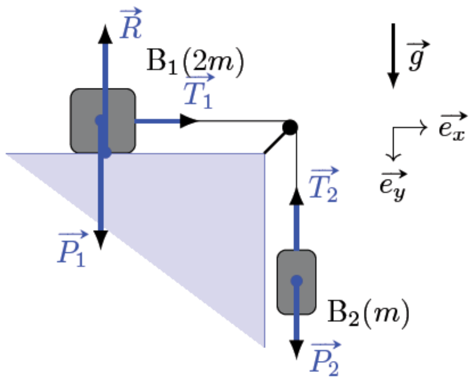
a) l'intensité de l'action normale f_n ....

b) l'intensité du frottement f_t ....

Entraînement 11.18 — **Calcul d'une accélération.**

Deux blocs B_1 et B_2 de masse respective $2m$ et m sont reliés par un fil. On passe le fil dans la gorge d'une poulie, puis on maintient le bloc B_1 sur la table alors que l'autre est suspendu dans l'air. On libère le bloc B_1 qui glisse alors sur la table. On note T_1 et T_2 les tensions exercées par le fil sur les blocs, a_1 et a_2 les accélérations respectives des blocs B_1 et B_2, et g le champ de pesanteur.

Les frottements sont négligeables.



a) Exprimer a_1 en fonction de m et T_1. ....

b) Exprimer l'accélération a_2 de B_2 en fonction de m, g et T_2. ....

Le fil étant inextensible et sans masse on a $a_1 = a_2$ et $T_1 = T_2$.

c) En déduire l'accélération en fonction uniquement de g ....

Réponses mélangées

$\arctan\left(\dfrac{mR\omega^2 - T}{mg}\right)$ $\quad a_0 t\overrightarrow{e_x} - v_0\overrightarrow{e_y}$ $\quad a_0\overrightarrow{e_x}$ $\quad P\overrightarrow{e_x}$ $\quad \dfrac{g}{3}$ $\quad v_0\overrightarrow{e_x} + gt\overrightarrow{e_z}$

$2{,}2\,\mathrm{N}$ $\quad 864\,\mathrm{N}$ $\quad -T\cos(\theta)\overrightarrow{e_x} - T\sin(\theta)\overrightarrow{e_y}$ $\quad b\sin(\alpha)\overrightarrow{e_x} + b\cos(\alpha)\overrightarrow{e_y}$

$(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{e_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\overrightarrow{e_\theta}$ $\quad (v_0 t + x_0)\overrightarrow{e_x} + y_0\overrightarrow{e_y} + \dfrac{1}{2}gt^2\overrightarrow{e_z}$ $\quad -d\sin(\alpha)\overrightarrow{e_x} + d\cos(\alpha)\overrightarrow{e_y}$

$\cos(\theta)\overrightarrow{e_x} + \sin(\theta)\overrightarrow{e_y}$ $\quad -P\sin(\alpha)\overrightarrow{e_x} - P\cos(\alpha)\overrightarrow{e_y}$ $\quad (T' + T)\sin\theta - F$

$\left(\dfrac{1}{2}a_0 t^2 + x_0\right)\overrightarrow{e_x} - v_0 t\overrightarrow{e_y} + z_0\overrightarrow{e_z}$ $\quad g\overrightarrow{e_z}$ $\quad g - \dfrac{T_2}{m}$ $\quad 0{,}46\,\mathrm{rad}$ $\quad$ ⓒ $\quad -\dot{\theta}\overrightarrow{e_r}$

$-T\overrightarrow{e_r}$ $\quad (P\cos(\theta) - T)\overrightarrow{e_r} - P\sin(\theta)\overrightarrow{e_\theta}$ $\quad 1{,}6\,\mathrm{N}$ $\quad a\cos(\alpha)\overrightarrow{e_x} + a\sin(\alpha)\overrightarrow{e_y}$ $\quad \dfrac{T_1}{2m}$

$-\dot{\theta}\cos(\theta)\overrightarrow{e_x} - \dot{\theta}\sin(\theta)\overrightarrow{e_y}$ $\quad \sqrt{(mR\omega^2 - T)^2 + (mg)^2}$ $\quad (T' - T)\cos\theta$ $\quad -m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + P\sin\alpha$

$-\sin(\theta)\overrightarrow{e_x} + \cos(\theta)\overrightarrow{e_y}$ $\quad (P - T\cos(\theta))\overrightarrow{e_x} - T\sin(\theta)\overrightarrow{e_y}$ $\quad P\cos(\theta)\overrightarrow{e_r} - P\sin(\theta)\overrightarrow{e_\theta}$

0 $\quad \dfrac{a_0}{k}\left[1 - \mathrm{e}^{-k(t-t_0)}\right]$ $\quad \dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$ $\quad a_0(t - t_0)$ $\quad \dfrac{p + m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$ $\quad \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$

$P\cos\alpha$ $\quad N\overrightarrow{e_y}$ $\quad c\cos(\alpha)\overrightarrow{e_x} - c\sin(\alpha)\overrightarrow{e_y}$ $\quad -\dot{\theta}\sin(\theta)\overrightarrow{e_x} + \dot{\theta}\cos(\theta)\overrightarrow{e_y}$ $\quad 1{,}17\,\mathrm{kN}$