Cinématique

Prérequis
Produit scalaire. Équations différentielles d'ordre 1. Projections de vecteurs.

Déplacements rectilignes

Entraînement 10.1 — **Distance et temps de parcours.**

Une voiture se déplace en ligne droite à $90\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$.

Toutes les réponses seront exprimées en « heures-minutes-secondes », par exemple « 2 h 32 min 12 s ».

a) Combien de temps faut-il à cette voiture pour parcourir 100 km ? ....

b) Quel serait l'allongement du temps de trajet si elle roulait à $80\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$? ....

Entraînement 10.2 — **Distance parcourue.**

Une voiture se déplace en ligne droite. Initialement à l'arrêt, elle subit une accélération constante valant a_0 pendant une durée τ_1, puis continue à vitesse constante pendant une durée τ_2.

a) Quelle est la vitesse v_1 du véhicule à la date $t = \tau_1$? ....

b) Quelle est la distance parcourue durant τ_1 ? ....

c) Quelle est la distance totale parcourue en fonction de a_0, τ_1 et τ_2 ? ....

Entraînement 10.3 — **Longueur d'une piste de décollage.**

Pour décoller un avion doit atteindre la vitesse de $v_d = 180\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$ en bout de piste.
Quelle est la longueur minimale L de la piste de décollage si l'avion accélère uniformément à la valeur $a = 2{,}5\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$?

(a) 300 m (b) 450 m (c) 500 m (d) 650 m

....

Entraînement 10.4 — **Distance de freinage.**

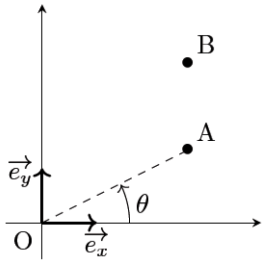
Une voiture roule à $110\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$ en ligne droite. En supposant que les freins imposent une décélération constante de norme $a = 10\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$, déterminer la distance d'arrêt de la voiture.

(a) 37,8 m (b) 46,7 m (c) 55,9 m (d) 63,5 m

....

Coordonnées et projections de vecteurs

Entraînement 10.5 — **Composantes de vecteurs.**



On considère deux points A et B tels que la droite (AB) est parallèle à la droite (Oy). Le vecteur $\overrightarrow{OA}$ fait un angle θ avec l'axe (Ox).

Exprimer les composantes des vecteurs suivants dans le repère $(O, \vec{e_x}, \vec{e_y})$ en fonction de $a = \|\overrightarrow{OA}\|$, $b = \|\overrightarrow{AB}\|$ et de l'angle θ.

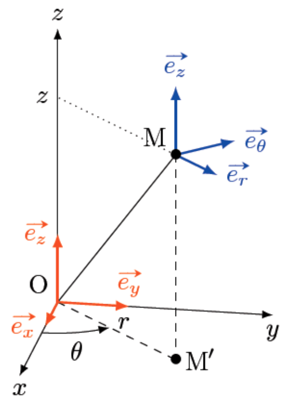
a) $\overrightarrow{OA}$ ....

b) $\overrightarrow{OB}$ ....

c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ ....

d) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ ....

Entraînement 10.6 — **Les coordonnées cylindriques.**



On considère le schéma ci-contre, dans lequel

- la base cartésienne $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$
- et la base cylindrique $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$

sont définies.

Le point M est repéré par la donnée de r, θ et z.

a) Écrire le vecteur $\overrightarrow{OM'}$ dans la base cartésienne ....

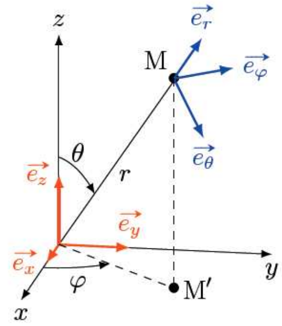
b) Écrire le vecteur $\overrightarrow{OM'}$ dans la base cylindrique ....

c) Écrire le vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base cartésienne ....

d) Écrire le vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base cylindrique ....

Entraînement 10.7 — **Les coordonnées sphériques.**

On considère le schéma ci-dessous, dans lequel la base cartésienne $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ et la base sphérique $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$ sont définies.



Le point M est repéré par la donnée de r, θ et φ.

a) Écrire la norme de $\overrightarrow{\mathrm{OM'}}$ en fonction de r et θ ....

b) Écrire le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM'}}$ dans la base cartésienne ....

c) Écrire le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ dans la base cartésienne ....

d) Écrire le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ dans la base sphérique ....

e) Écrire le vecteur $\overrightarrow{e_z}$ dans la base sphérique ....

Entraînement 10.8 — **Jouons au tennis.**

Un élève regarde un match de tennis. Il filme un des échanges et décide d'étudier le mouvement de la balle pour en déduire sa vitesse et son accélération.

Pour cela, il utilise un logiciel d'exploitation de vidéo et remplit le tableau suivant :

t (en s)	0	0,05	0,10	0,15	0,20
x (en m)	0	0,35	0,70	1,05	1,40
y (en m)	1,5	2,09	2,66	3,21	3,74

a) Déterminer la vitesse v_0 (en $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$) de la balle à l'instant initial ....

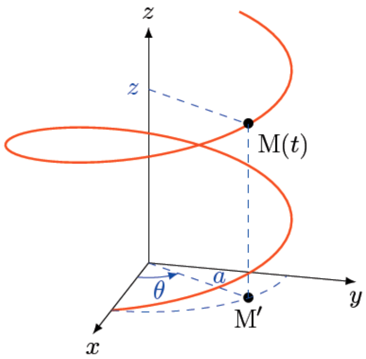
b) Déterminer l'accélération (en $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$) de la balle à l'instant initial ....

Dérivée de vecteurs

Entraînement 10.9 — **Étude d'un mouvement hélicoïdal.**

Le point matériel M de coordonnées cartésiennes (x, y, z) décrit une trajectoire hélicoïdale, définie par les équations :

$$\begin{cases} x(t) = a \times \cos(\omega t) \\ y(t) = a \times \sin(\omega t) \\ z(t) = b \times t. \end{cases}$$



a) Déterminer la vitesse $\vec{v}(\mathrm{M})$ dans la base cartésienne ....

b) Déterminer la norme de la vitesse ....

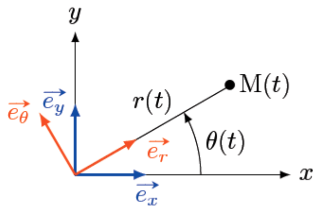
c) Déterminer l'accélération $\vec{a}(\mathrm{M})$ dans la base cartésienne ....

d) Déterminer la norme de l'accélération ....

Entraînement 10.10 — **Dérivation des vecteurs unitaires de la base polaire.**

On considère un point M(t) en mouvement dans le plan $(x\mathrm{O}y)$.

On note $r(t)$ et $\theta(t)$ les coordonnées de M(t) dans le repère polaire $(\mathrm{O}, \vec{e_r}, \vec{e_\theta})$.



a) Exprimer le vecteur $\vec{e_r}$ dans la base cartésienne $(\mathrm{O}, \vec{e_x}, \vec{e_y})$ ....

b) En déduire la dérivée $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e_r}}{\mathrm{d}t}$ dans la base cartésienne $(\mathrm{O}, \vec{e_x}, \vec{e_y})$ ......

c) Exprimer le vecteur $\vec{e_x}$ dans la base polaire $(\mathrm{O}, \vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ ....

d) Exprimer le vecteur $\vec{e_y}$ dans la base polaire $(\mathrm{O}, \vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ ....

e) En déduire l'expression de la dérivée $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e_r}}{\mathrm{d}t}$ dans la base polaire ......

Entraînement 10.11 — Calcul d'une vitesse en coordonnées polaires.

On considère un point M dont les coordonnées polaires sont $\begin{cases} r(t) = a \times t \\ \theta(t) = b \times t^2. \end{cases}$

La vitesse en coordonnées polaires s'écrit :

$$\vec{v}(\mathrm{M}) = \dot{r}\,\vec{e_r} + r\dot{\theta}\,\vec{e_\theta},$$

où $\dot{r}\,\vec{e_r}$ est appelée *vitesse radiale* et $r\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$ *vitesse orthoradiale.*

a) Déterminer la dimension de a ....

b) Déterminer la dimension de b ....

c) Déterminer la vitesse radiale en fonction de a ....

d) Déterminer la vitesse orthoradiale en fonction de a, b et t ....

e) En déduire l'expression de $\vec{v}(\mathrm{M})$ ....

Entraînement 10.12 — Mouvement en spirale.

Un point M(t) décrit une trajectoire en forme de spirale. Dans le repère polaire $(\mathrm{O}, \vec{e_r}, \vec{e_\theta})$, les coordonnées de M($t$) sont :

$$\begin{cases} r(t) = r_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau} \\ \theta(t) = \omega t \end{cases}$$

où r_0, τ et ω sont des constantes positives.

a) Déterminer la vitesse $\vec{v}(\mathrm{M})$ en coordonnées polaires.

On pourra utiliser la formule donnée dans l'entraînement précédent ....

L'accélération en coordonnées polaires s'écrit :

$$\vec{a}(\mathrm{M}) = \big(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\big)\vec{e_r} + \big(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\big)\vec{e_\theta}.$$

b) Déterminer l'accélération $\vec{a}(\mathrm{M})$ ....

On donne les valeurs suivantes : $\omega = 4{,}78\,\mathrm{tour}\cdot\mathrm{min}^{-1}$, $\tau = 2{,}0\,\mathrm{s}$ et $r_0 = 4{,}0\,\mathrm{cm}$.

c) Dans ces conditions, l'accélération est-elle radiale ou orthoradiale ? ....

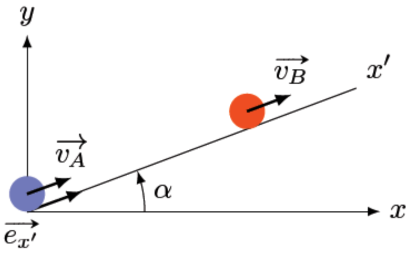
d) Le mouvement de M est-il accéléré ou décéléré ? ....

e) Déterminer l'équation polaire de la trajectoire de M ....

Entraînement 10.13 — Collision sur plan incliné.

Deux billes évoluent sur un plan incliné faisant un angle $\alpha = 20°$ par rapport à l'horizontale.

À $t = 0$, elles sont distantes d'une longueur L.



- La bille A possède une vitesse initiale $v_0\overrightarrow{e_{x'}}$.
  Son accélération $\vec{a}(A) = -a\overrightarrow{e_{x'}}$ est constante au cours du temps.
  Nous noterons $v_A(t)\overrightarrow{e_{x'}}$ sa vitesse à l'instant t.
- La bille B quant à elle, n'a pas de vitesse initiale mais possède une accélération constante $\vec{a}(B) = a\overrightarrow{e_{x'}}$.
  Nous noterons $v_B(t)\overrightarrow{e_{x'}}$ sa vitesse à l'instant t.

On donne $a = 3{,}35\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ et $v_0 = 3\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

a) Exprimer $v_A(t)$ en fonction a, t et v_0 ....

b) Exprimer $v_B(t)$ en fonction a et t ....

c) Déterminer la position x'_A de A en fonction du temps ....

d) Déterminer la position x'_B de B en fonction du temps ....

e) Déterminer la distance L minimale (en cm) pour qu'une collision puisse avoir lieu.

....

Entraînement 10.14 — Chute libre.

On considère le point M de masse m et de coordonnées (x, y, z) dans la base cartésienne $(\mathrm{O}, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$.

Il est lancé avec la vitesse $\overrightarrow{v_0} = v_{0x}\overrightarrow{e_x} + v_{0z}\overrightarrow{e_z}$ à partir de l'origine O du repère dans le champ de pesanteur uniforme $\vec{g} = -g\overrightarrow{e_z}$.

Tout frottement étant négligé, l'accélération de M est égale à $\vec{g}$ à tout instant.

a) Exprimer $x(t)$ en fonction de v_{0x} et t ....

b) Exprimer $z(t)$ en fonction de v_{0z}, g et t ....

c) En déduire l'équation cartésienne de la trajectoire z en fonction de x, c'est-à-dire une relation entre $x(t)$ et $z(t)$ ....

Entraînement 10.15 — Pauvre gazelle.

Un lion chasse une gazelle. Il court à la vitesse constante de $5{,}0\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. La gazelle aperçoit le lion quand il est à 10m de distance. Elle se met alors en fuite en accélérant à $2{,}0\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Pour rattraper la gazelle, le lion se met aussi à accélérer au même instant à $3{,}0\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

a) Combien de temps mettra le lion à rattraper la gazelle ? b) Quelle distance aura parcourue la gazelle avant de se faire dévorer ?

Réponses mélangées

$\vec{e_y} = \sin\theta\vec{e_r} + \cos\theta\vec{e_\theta}$ $\quad -a\omega^2(\cos(\omega t)\vec{e_x} + \sin(\omega t)\vec{e_y})$ $\quad r\sin(\theta)(\cos(\varphi)\vec{e_x} + \sin(\varphi)\vec{e_y})$

$a\vec{e_r} + 2abt^2\vec{e_\theta}$ $\quad$ (b) $\quad a\omega(-\sin(\omega t)\vec{e_x} + \cos(\omega t)\vec{e_y}) + b\vec{e_z}$ $\quad r = r_0 \mathrm{e}^{-\theta}$ $\quad \dfrac{1}{2}at^2 + L$

$a\vec{e_r}$ $\quad a(\cos(\theta)\vec{e_x} + \sin(\theta)\vec{e_y})$ $\quad 8{,}0\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$ $\quad a_0 \times \tau_1$ $\quad -b\vec{e_y}$ $\quad$ orthoradiale

$-at + v_0$ $\quad -\dfrac{1}{2}at^2 + v_0 t$ $\quad a\left(\cos(\theta)\vec{e_x} + \left(\sin(\theta) + \dfrac{b}{a}\right)\vec{e_y}\right)$ $\quad 67\,\mathrm{cm}$ $\quad \dfrac{a_0 \times {\tau_1}^2}{2}$

$r\vec{e_r}$ $\quad \dfrac{L}{T}$ $\quad r\sin(\theta)(\cos(\varphi)\vec{e_x} + \sin(\varphi)\vec{e_y}) + r\cos(\theta)\vec{e_z}$ $\quad 1{,}7\,\mathrm{s}$ $\quad \dfrac{\mathrm{d}\vec{e_r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\vec{e_\theta}$

$49{,}4\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$ $\quad 8\,\mathrm{min}\ 20\,\mathrm{s}$ $\quad \cos(\theta)\,\vec{e_r} - \sin(\theta)\,\vec{e_\theta}$ $\quad 2{,}9\,\mathrm{m}$ $\quad \cos\theta\vec{e_x} + \sin\theta\vec{e_y}$

(c) $\quad \sqrt{(a\omega)^2 + b^2}$ $\quad r\vec{e_r} + z\vec{e_z}$ $\quad 2abt^2\vec{e_\theta}$ $\quad 1\,\mathrm{h}\ 6\,\mathrm{min}\ 40\,\mathrm{s}$ $\quad r\vec{e_r}$ $\quad at$ $\quad \dfrac{1}{T^2}$

$r(\cos(\theta)\vec{e_x} + \sin(\theta)\vec{e_y}) + z\vec{e_z}$ $\quad \vec{e_x} = \cos\theta\vec{e_r} - \sin\theta\vec{e_\theta}$ $\quad |r\sin(\theta)|$ $\quad v_{0x}t$ $\quad$ décéléré

$a\omega^2$ $\quad r(\cos(\theta)\vec{e_x} + \sin(\theta)\vec{e_y})$ $\quad r_0\mathrm{e}^{-t/\tau}\left(-\dfrac{1}{\tau}\vec{e_r} + \omega\vec{e_\theta}\right)$ $\quad z = -\dfrac{g}{2v_{0x}^2}x^2 + \dfrac{v_{0z}}{v_{0x}}x$

$a\left(2\cos(\theta)\vec{e_x} + \left(2\sin(\theta) + \dfrac{b}{a}\right)\vec{e_y}\right)$ $\quad r_0\mathrm{e}^{-t/\tau}\left(\left(\dfrac{1}{\tau^2} - \omega^2\right)\vec{e_r} - \left(2\dfrac{\omega}{\tau}\right)\vec{e_\theta}\right)$

$\dfrac{\mathrm{d}\vec{e_r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}(-\sin\theta\vec{e_x} + \cos\theta\vec{e_y})$ $\quad a_0 \times \tau_1 \times \left(\dfrac{\tau_1}{2} + \tau_2\right)$ $\quad -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t$