

Statique des fluides

Prérequis

Pression dans un gaz et un liquide incompressible. Poussée d'Archimède. Bases de la mécanique. Équations différentielles.

Constantes utiles

→ champ de pesanteur : $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

→ constante des gaz parfaits : $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$

Pour commencer



Entraînement 1.1 — Quelques conversions.



On rappelle que $1 \text{ atm} = 1013,25 \text{ hPa}$.

Un fluide exerce sur une paroi une pression de 750 kPa . Convertir cette pression en :

a) $\text{N} \cdot \text{cm}^{-2}$

b) bar

c) atm



Entraînement 1.2 — Champagne !



Dans une bouteille de champagne, le gaz est maintenu sous une pression $p = 6,0 \text{ bar}$ grâce à un bouchon cylindrique de diamètre 20 mm .

Quelle est l'intensité de la force pressante qui pousse le bouchon vers le haut ?

Quelle est la pression intérieure si l'on incline la bouteille de 30° ?



Entraînement 1.3 — Est-ce homogène ?



On considère un fluide dont la pression p dépend de l'altitude z (comprise entre 0 et z_{max}). Pour $z = 0$, la pression vaut p_0 . Après analyse et résolution du problème, quatre étudiants obtiennent quatre résultats différents pour l'expression de $p(z)$.

Indiquer le ou les résultats qui ont le mérite d'être homogènes.

(a) $p(z) = p_0 + z$

(b) $p(z) = p_0 \left(1 - e^{-\frac{z}{z_{\text{max}}}} \right) + z$

(c) $p(z) = \frac{z_{\text{max}}}{z_{\text{max}} + z} p_0$

(d) $p(z) = \frac{1 - z - z^2}{1 - z_{\text{max}} - z_{\text{max}}^2} p_0$

.....

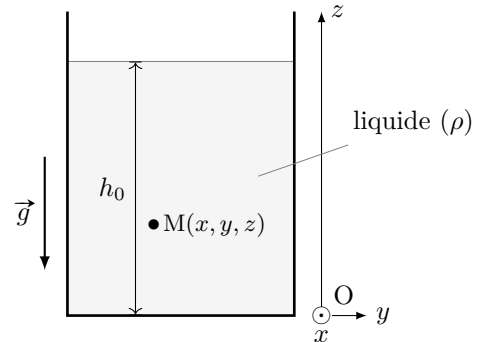
Pression dans un liquide

QCM Entraînement 1.4 — Quelle est la formule déjà ?



On considère un liquide incompressible de masse volumique ρ en équilibre dans le champ de pesanteur $\vec{g}$ uniforme et soumis à une pression p_0 à sa surface.

Comment s'exprime la pression au point M dans le liquide ?



(a) $p(M) = p_0(1 - \rho g z)$

(c) $p(M) = p_0 + \rho g h_0$

(b) $p(M) = (p_0 + \rho g z) \vec{u}_z$

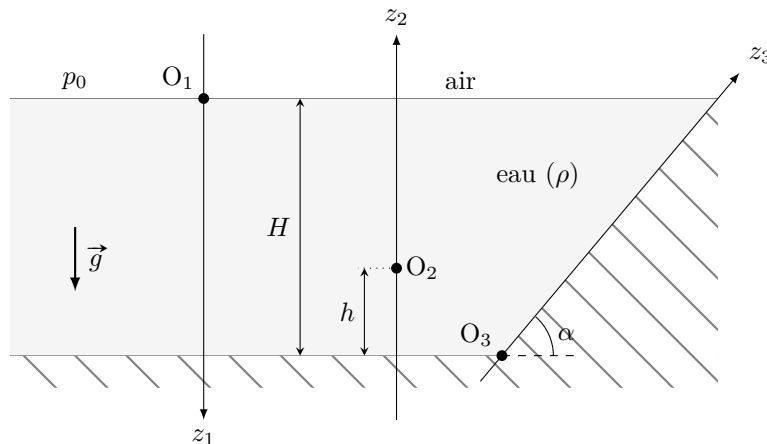
(d) $p(M) = p_0 + \rho g(h_0 - z)$

.....

Entraînement 1.5 — La pression dans différents repères.



On note p la pression dans l'eau, supposée incompressible et de masse volumique ρ , et p_0 la pression de l'air à l'interface eau-air.



Exprimer p dans les différents systèmes de coordonnées.

a) $p(z_1)$, en fonction de p_0 , de g et de z_1

b) $p(z_2)$, en fonction de p_0 , de g , de z_2 de H et de h

c) $p(z_3)$, en fonction de p_0 , de g , de z_3 de H et de α

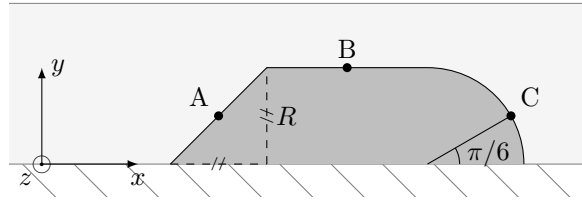


Entraînement 1.6 — Projection de vecteurs.



On considère un solide situé au fond de l'eau.

Exprimer, dans la base orthonormée $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, le vecteur unitaire normal à la surface de l'objet et orienté dans le sens de la force pressante de l'eau sur l'objet :



a) En A

c) En C

b) En B

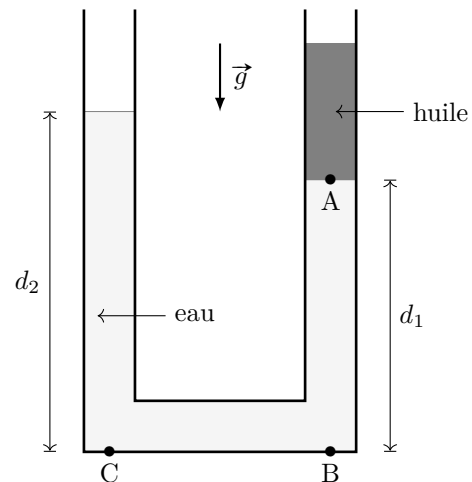
Entraînement 1.7 — Dans un tube en U.



On verse dans un tube en U, dont la section a pour surface s , une certaine quantité d'eau puis un volume V_h d'huile. Les liquides se répartissent comme indiqué ci-contre.

On cherche à exprimer la différence de hauteur entre les deux niveaux d'eau de part et d'autre.

On note p_{atm} la pression atmosphérique, ρ_e la masse volumique de l'eau et ρ_h celle de l'huile.



a) Que peut-on dire de la pression en A ?

(a) $p_A = p_{\text{atm}} + \rho_e g \frac{V_h}{s}$

(b) $p_A = p_{\text{atm}} + \rho_h g \frac{V_h}{s}$

(c) $p_A = p_{\text{atm}} + \rho_e g d_1$

.....

b) Que peut-on dire de la pression en B ?

(a) $p_B = p_{\text{atm}} + \rho_e g d_1$

(b) $p_B = p_{\text{atm}} + \rho_e g \left(\frac{V_h}{s} + d_1 \right)$

(c) $p_B = p_A + \rho_e g d_1$

.....

c) Que peut-on dire de la pression en C ?

(a) $p_C = p_B$

(b) $p_C = p_{\text{atm}} + p_A$

(c) $p_C = p_{\text{atm}} + \rho_e g d_2$

.....

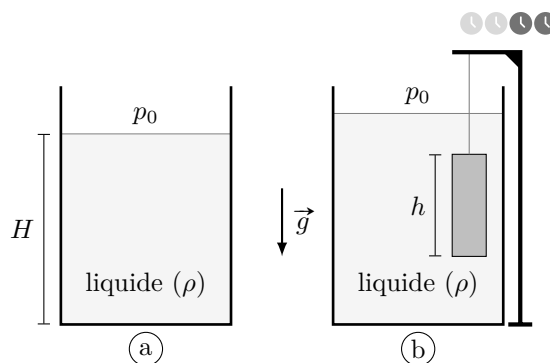
d) En déduire une expression de $d_2 - d_1$

Entraînement 1.8 — Immersion et pression.

Un récipient cylindrique de section de surface S contient un liquide sur une hauteur H : c'est la situation (a).

On immerge complètement un cylindre solide de section de surface s et de hauteur h que l'on maintient grâce à une potence : c'est la situation (b).

On note ρ la masse volumique du liquide et g le champ de pesanteur.



Exprimer la pression au fond du récipient en fonction des données :

a) Situation (a) ... b) Situation (b) ...

Poussée d'Archimède

Entraînement 1.9 — Immersion de volumes.

La poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$ subie par un corps submergé ou immergé dans un fluide est une force dont l'intensité correspond à celle du poids de fluide déplacé par ce corps : $\|\vec{\Pi}\| = m_{\text{fluide}} \times g$.

On connaît les masses volumiques suivantes, à 25 °C :

Matériau	aluminium	eau	fer	glycérine	plastique	savon liquide
Masse volumique (en $\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$)	2,7	1,0	7,9	1,2	0,9	2,5

Calculer, à 25 °C, l'intensité de la poussée d'Archimède qui s'exerce sur :

a) un cube de fer de côté $a = 10$ cm totalement immergé dans de la glycérine.

b) une boule d'aluminium de rayon $a = 10$ cm à moitié immergée dans du savon liquide.

c) un cylindre de plastique de rayon $a = 10$ cm et de hauteur $4a$ immergé verticalement aux deux-tiers dans de l'eau.

QCM Entraînement 1.10 — Flottaison d'un glaçon.

En déposant un glaçon de masse volumique ρ_S et de volume V_S dans un fluide de masse volumique ρ_L et de volume V_L , il s'immerge d'un volume V_{imm} . Comment sont reliées ces grandeurs ?

- (a) $\rho_L V_S = \rho_S V_{\text{imm}}$ (d) $\rho_S V_{\text{imm}} = \rho_L V_S$
 (b) $\rho_L V_{\text{imm}} = \rho_S V_S$ (e) $\rho_L V_{\text{imm}} = \rho_L V_L$
 (c) $\rho_S V_{\text{imm}} = \rho_S V_S$ (f) $V_{\text{imm}} = V_S$

.....

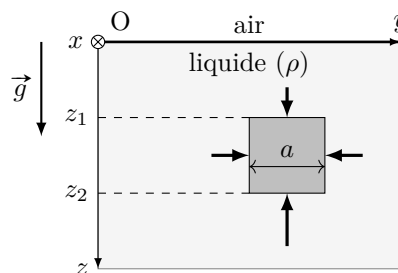
Entraînement 1.11 — Eurêka !



Un bloc solide qui a la forme d'un cube d'arête a est plongé dans un liquide de masse volumique ρ .

Il est soumis à des forces pressantes sur chacune des faces.

On note $\vec{R}$ la résultante de ces forces.



Exprimer les composantes de $\vec{R}$ dans le repère orthonormé (O, x, y, z) .

- a) R_x b) R_y c) R_z
- d) Retrouver $\vec{R}$ en fonction du poids $\vec{P}_d$ du liquide déplacé

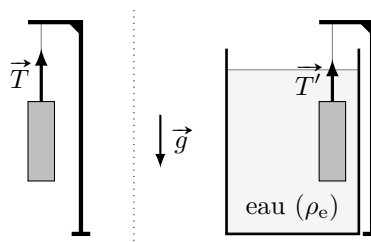
A.N. Entraînement 1.12 — Mesure de densité.



Un morceau de métal de volume inconnu est suspendu à une corde.

Avant immersion, la tension dans la corde vaut 10 N.

Une fois le métal totalement immergé dans l'eau, on mesure une tension de 8 N.



- a) Calculer l'intensité de la poussée d'Archimède
- b) En déduire la densité du métal par rapport à l'eau

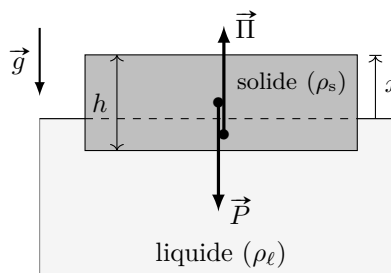
🍷 Entraînement 1.13 — Ligne de flottaison.



Un bloc en forme de parallélépipède, de masse volumique ρ_s , de base S et d'épaisseur h flotte à la surface d'un liquide de masse volumique $\rho_\ell > \rho_s$.

On note $\vec{P}$ le poids du solide, $\vec{\Pi}$ la poussée d'Archimède, $\vec{g}$ le champ de pesanteur et x la hauteur de la partie émergée.

Enfin, on note $\vec{R} = \vec{P} + \vec{\Pi}$.

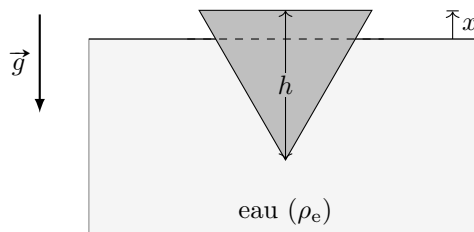


- a) Exprimer $\vec{R}$ en fonction de x , h , S , ρ_s , ρ_ℓ et $\vec{g}$
- b) En déduire la valeur de x quand le bloc est à l'équilibre
- c) On exerce une force verticale $\vec{F}$ supplémentaire sur le glaçon pour le maintenir totalement immergé. Que vaut $\|\vec{F}\|$?

Entraînement 1.14 — Iceberg conique.



Un iceberg en forme de cône, de masse volumique ρ_s , de hauteur h flotte à la surface de l'eau de masse volumique ρ_e . On note x la hauteur de la partie émergée.



On rappelle que le volume d'un cône de section de surface S et de hauteur h vaut $\frac{1}{3}Sh$.

a) Parmi les résultats faux suivants, indiquer ceux qui ont le mérite d'être homogènes.

(a) $x = h \left(1 - \frac{\rho_s}{\rho_e} \right)$

(c) $x = \frac{1}{3} \frac{h - \rho_s}{\rho_e}$

(b) $x = \sqrt[3]{\frac{h\rho_s}{\rho_e}}$

(d) $x = h(\rho_s - \rho_e)$

.....

b) Exprimer le volume immergé en fonction de S , h et x

c) En déduire x en traduisant l'égalité entre la poussée d'Archimède et le poids de l'iceberg.

.....

QCM Entraînement 1.15 — Quand Archimède fait mal à la tête.



Considérons deux verres identiques A et B. On remplit le verre A d'eau jusqu'à une certaine hauteur h .

a) Dans le verre B, on met quelques glaçons, et on complète avec de l'eau jusqu'à la même hauteur h .

Les masses m_A et m_B des deux verres vérifient :

(a) $m_A < m_B$

(b) $m_A = m_B$

(c) $m_A > m_B$

.....

b) Dans le verre B, on remplace maintenant les glaçons par des boules de polystyrène de même masse que les glaçons mais de densité inférieure.

Par à rapport à la hauteur initiale, le niveau dans ce verre :

(a) augmente

(b) reste le même

(c) diminue

.....

c) On remplace les glaçons par des boules en fer de masse identique aux glaçons dans le verre B.

Par à rapport à la hauteur initiale, le niveau dans ce verre :

(a) augmente

(b) reste le même

(c) diminue

.....

Équation de la statique des fluides



Entraînement 1.16 — Musculation sur le gradient.



On donne l'expression du gradient en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(p) = \frac{\partial p}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{e}_z.$$

Exprimer $\overrightarrow{\text{grad}}(p)$ pour les champs de pression suivants :

a) $p(x, y, z) = p_0 + Az$, où p_0 et A sont des constantes

b) $p(x, y, z) = Bxy^2 + Ce^{2z}$, où B et C sont des constantes



Entraînement 1.17 — Atmosphère de Mars.



L'atmosphère de Mars est composée de 96 % de dioxyde de carbone, 2 % d'argon, 2 % de diazote et contient des traces de dioxygène, d'eau, et de méthane.

La pression et la température moyenne à la surface de Mars sont $p_0 = 6 \text{ mbar}$ et $T = -60^\circ \text{C}$.

On donne les masses molaires des éléments suivants :

Élément	H	C	O	N	Ar
Masse molaire (en $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$)	1	12	16	14	40

a) Quelle est la masse molaire M de l'atmosphère martienne?

On considère l'atmosphère martienne comme un gaz parfait, et on note ρ sa masse volumique.

b) Estimer ρ à la surface :

Dans le référentiel martien d'axe (Oz) vertical ascendant, la pression vérifie l'équation

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g.$$

La température est considérée uniforme dans toute l'atmosphère.

c) La pression $p(z)$ dans l'atmosphère de Mars, qui vérifie $p(0) = p_0$, s'écrit alors :

Ⓐ $p(z) = p_0 \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)$ avec $z_0 = \frac{RT}{Mg}$

Ⓒ $p(z) = p_0 \exp\left(-\frac{z}{z_0}\right)$ avec $z_0 = \frac{RT}{Mg}$

Ⓑ $p(z) = p_0 \exp\left(-\frac{z}{z_0}\right)$ avec $z_0 = \frac{Mg}{RT}$

Ⓓ $p(z) = p_0 \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)$ avec $z_0 = \frac{Mg}{RT}$

.....

Le champ de pesanteur sur Mars vaut $g = 3,72 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

d) Estimer l'épaisseur H de l'atmosphère qu'on assimilera à $5z_0$



Entraînement 1.18 — Une expression infinitésimale.



On considère un fluide dont la pression p dépend de l'altitude z (comprise entre 0 et $z_{\max}$).

On suppose que cette pression vérifie la relation suivante :

$$p(z + dz) - p(z) = -\frac{2}{z_{\max}}p(z) dz.$$

On souhaite trouver l'expression de $p(z)$ en fonction de z et de p_0 (la pression en $z = 0$).

a) Donner l'équation différentielle vérifiée par p

b) Donner l'expression de $p(z)$ en fonction de p_0

Entraînement 1.19 — Résoudre l'équation de la statique.



Un fluide en équilibre dans le champ de pesanteur $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ vérifie l'équation

$$\overrightarrow{\text{grad}}(p) = \rho \vec{g}.$$

où ρ est la masse volumique du fluide qui dépend éventuellement de la pression.

Dans chacun des cas suivants, déterminer le champ de pression $p(x, y, z)$ sachant que $p(x, y, 0) = p_0$ et que les paramètres a , b , c et g sont des constantes.

a) $\rho = a \frac{p}{p_0}$

b) $\rho = a + b(p - p_0)$

c) $\rho = a - b e^{-z/c}$

Entraînement 1.20 — Attention ça déborde !

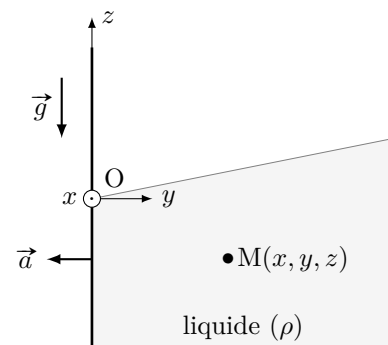


Un récipient cubique contenant un liquide incompressible de masse volumique ρ est soumis à une accélération uniforme $\vec{a} = -a\vec{e}_y$.

Dans le référentiel lié au récipient, la pression vérifie l'équation

$$\overrightarrow{\text{grad}}(p) = \rho(\vec{g} - \vec{a})$$

avec $p(0, 0, 0) = p_0$.



a) Déterminer $p(x, y, z)$ dans le liquide

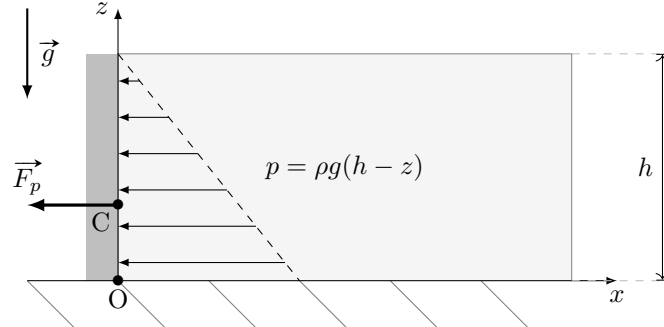
b) En déduire l'équation de la surface libre.

Forces pressantes

Entraînement 1.21 — Pression sur un barrage.



Un barrage rectangulaire de hauteur h et de largeur L baigne d'un côté dans l'air de l'autre dans de l'eau. On modélise la situation à l'aide du schéma suivant :



La fonction $p = \rho g(h - z)$ correspond à la surpression exercée par l'eau à l'altitude z , étant donné la masse volumique de l'eau ρ et l'intensité du champ de pesanteur g .

Calculer :

- La résultante des forces pressantes $F_p = \iint_{\text{barrage}} p(z) \, dy \, dz$
- Le moment en O des forces pressantes $\mathcal{M}_p = \iint_{\text{barrage}} z \, p(z) \, dy \, dz$
- La position du centre de poussée z_C tel que $\mathcal{M}_p = z_C \times F_P$

Réponses mélangées

$[\rho_s h - \rho_\ell(h - x)]S \vec{g}$	$14,8 \, \text{g} \cdot \text{m}^{-3}$	$z = \frac{a}{g}y$	$\rho(ay - gz) + p_0$	$p_0 + \rho g(H - h - z_2)$
7,5 bar	$\rho g(H - z_3 \sin(\alpha)) + p_0$	(a)	(c)	$p_0 + \rho g z_1$
7,4 atm	$p_0 e^{-agz/p_0}$	$p_0 + \rho g\left(H + \frac{s}{S}h\right)$	$\frac{1}{6}\rho g L h^3$	(b)
$43,6 \, \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$	0	$\frac{1}{3} \frac{S(h-x)^3}{h^2}$	$-\frac{1}{2}(\sqrt{3}\vec{e}_x + \vec{e}_y)$	51 N
6 bar	$By^2\vec{e}_x + 2Bxy\vec{e}_y + 2Ce^{2z}\vec{e}_z$	(c)	12 N	$-\rho g a^3$
$p_0 - agz + bcg(1 - e^{-z/c})$	5	$1,9 \times 10^2 \, \text{N}$	(c)	$p_0 + \rho g H$
(d)	$75 \, \text{N} \cdot \text{cm}^{-2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x - \vec{e}_y)$	2 N	$\frac{dp}{dz} = -\frac{2p}{z_{\max}}$
$-\vec{e}_y$	(c)	82 N	(b)	55 km
		$p_0 + \frac{a}{b}(e^{-bgz} - 1)$	$-\vec{P}_d$	$h\left(\frac{\rho_\ell - \rho_s}{\rho_\ell}\right)$

► Réponses et corrigés page 10

Fiche n° 1. Statique des fluides

Réponses

- 1.1 a) $75 \text{ N} \cdot \text{cm}^{-2}$
- 1.1 b) $7,5 \text{ bar}$
- 1.1 c) $7,4 \text{ atm}$
- 1.2 $1,9 \times 10^2 \text{ N}$
- 1.2 6 bar
- 1.3 (c)
- 1.4 (d)
- 1.5 a) $p_0 + \rho g z_1$
- 1.5 b) $p_0 + \rho g (H - h - z_2)$
- 1.5 c) $\rho g (H - z_3 \sin(\alpha)) + p_0$
- 1.6 a) $\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x - \vec{e}_y)$
- 1.6 b) $-\vec{e}_y$
- 1.6 c) $-\frac{1}{2}(\sqrt{3}\vec{e}_x + \vec{e}_y)$
- 1.7 a) (b)
- 1.7 b) (c)
- 1.7 c) $(a) (c)$
- 1.7 d) $\frac{\rho_h V_h}{\rho_e s}$
- 1.8 a) $p_0 + \rho g H$
- 1.8 b) $p_0 + \rho g \left(H + \frac{s}{S} h \right)$
- 1.9 a) 12 N
- 1.9 b) 51 N
- 1.9 c) 82 N
- 1.10 (b)
- 1.11 a) 0

- 1.11 b) 0
- 1.11 c) $-\rho g a^3$
- 1.11 d) $-\vec{P}_d$
- 1.12 a) 2 N
- 1.12 b) 5
- 1.13 a) $[\rho_s h - \rho_\ell (h - x)] S \vec{g}$
- 1.13 b) $h \left(\frac{\rho_\ell - \rho_s}{\rho_\ell} \right)$
- 1.13 c) $(\rho_\ell - \rho_s) S h g$
- 1.14 a) (a)
- 1.14 b) $\frac{1}{3} \frac{S(h-x)^3}{h^2}$
- 1.14 c) $h \left(1 - \sqrt[3]{\frac{\rho_s}{\rho_e}} \right)$
- 1.15 a) (b)
- 1.15 b) (b)
- 1.15 c) (c)
- 1.16 a) $A \vec{e}_z$
- 1.16 b) $B y^2 \vec{e}_x + 2 B x y \vec{e}_y + 2 C e^{2z} \vec{e}_z$
- 1.17 a) $43,6 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
- 1.17 b) $14,8 \text{ g} \cdot \text{m}^{-3}$
- 1.17 c) (c)
- 1.17 d) 55 km
- 1.18 a) $\frac{dp}{dz} = -\frac{2p}{z_{\max}}$
- 1.18 b) $p_0 e^{-2z/z_{\max}}$
- 1.19 a) $p_0 e^{-\rho g z / p_0}$

1.19 b)	$p_0 + \frac{a}{b}(e^{-bgz} - 1)$	1.21 a)	$\frac{1}{2}\rho g L h^2$
1.19 c)	$p_0 - agz + bcg(1 - e^{-z/c})$	1.21 b)	$\frac{1}{6}\rho g L h^3$
1.20 a)	$\rho(ay - gz) + p_0$	1.21 c)	$\frac{1}{3}h$
1.20 b)	$z = \frac{a}{g}y$		

Corrigés

1.1 a) Par définition, on a $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$. Ainsi, on a

$$750 \text{ kPa} = 750 \times 10^3 \text{ Pa} = 750 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} = 750 \times 10^3 \times \text{N} \times (100 \text{ cm})^{-2} = 75 \text{ N} \cdot \text{cm}^{-2}.$$

1.1 b) En effet, par définition on a $1 \text{ bar} = 1 \times 10^5 \text{ Pa}$.

1.1 c) Par définition, on a $1 \text{ atm} = 1013,25 \text{ hPa}$. C'est pourquoi $750 \text{ kPa} = 7500 \text{ hPa} = \frac{7500}{1013,25} = 7,4 \text{ atm}$.

1.2 La force de pression s'écrit $\vec{F} = \iint p \vec{n} dS$ où $\vec{n}$ est le vecteur unitaire normal à l'élément de la surface dirigé vers l'intérieur du solide. Ici $\vec{n}$ est verticale car la surface est un disque horizontal. Enfin, la pression étant uniforme sur la base du cylindre, on a

$$\vec{F} = pS \vec{n} \quad \text{soit} \quad F = p\pi(d/2)^2 = 6 \times 10^5 \times \pi \times (0,01)^2 = 1,9 \times 10^2 \text{ N}.$$

1.2 Le volume de gaz ne variant pas, la pression reste la même.

1.3 La formule (a) n'est pas homogène car p_0 est une pression et z une longueur. La formule (b) n'est pas homogène car $p_0 \left(1 - e^{-\frac{z}{z_{\max}}}\right)$ est une pression et z une longueur. La formule (d) n'est pas homogène car (entre autres) l'expression $1 - z - z^2$ n'est pas homogène, puisque z est une longueur et z^2 une aire.

1.4 Dans un liquide incompressible en équilibre dans le champ de pesanteur uniforme $\vec{g}$, la pression suit la loi $p(M) = p_0 + \rho g \times h_M$ où h_M est la profondeur du point M depuis la surface libre soumise à une pression p_0 . Ici, le point M se situe à une profondeur $h_M = h_0 - z$. Donc, on a $p(M) = p_0 + \rho g(h_0 - z)$.

1.5 a) L'équation fondamentale de la statique des fluides est $\overrightarrow{\text{grad}} p = \rho \vec{g}$. On projette cette égalité suivant l'axe $(O_1 z_1)$:

$$\frac{dp}{dz_1} = \rho g \quad \text{d'où après intégration} \quad p(z_1) = \rho g z_1 + C_1.$$

À l'interface air/eau, on a $p(z_1 = 0) = p_0 = C_1$. Ainsi, on a $p(z_1) = p_0 + \rho g z_1$.

1.5 b) Suivant l'axe $(O_2 z_2)$, on a $\frac{dp}{dz_2} = -\rho g$. D'où, $p(z_2) = -\rho g z_2 + C_2$. À l'interface air/eau, on a

$$p(z_2 = H - h) = p_0 = -\rho g(H - h) + C_2.$$

Donc, on a $C_2 = p_0 + \rho g(H - h)$. Finalement, on trouve $p(z_2) = p_0 + \rho g(H - h - z_2)$.

1.5 c) Suivant l'axe $(O_3 z_3)$, on a

$$\frac{dp}{dz_3} = -\rho g \sin \alpha \quad \text{ce qui donne} \quad p(z_3) = -\rho g \sin \alpha z_3 + C_3.$$

Au fond de l'eau, on a $p(z_3 = 0) = p_0 + \rho g H = C_3$. Par conséquent, on a $p(z_3) = \rho g(H - z_3 \sin \alpha) + p_0$.

On pouvait aussi plus simplement reprendre la formule de la question b) et noter que $z_3 = (z_2 + h)/\sin(\alpha)$, ce qui donne le même résultat.

1.6 a) La force pressante est toujours normale à la surface de l'objet et orientée vers celui-ci.

On trouve ainsi : $\vec{u}_A = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x - \vec{e}_y)$.

1.6 b) La force pressante est toujours normale à la surface de l'objet et orientée vers celui-ci.

On trouve ainsi : $\vec{u}_B = -\vec{e}_y$.

1.6 c) La force pressante est toujours normale à la surface de l'objet et orientée vers celui-ci.

On trouve ainsi : $\vec{u}_C = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\vec{e}_x - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\vec{e}_y = -\frac{1}{2}(\sqrt{3}\vec{e}_x + \vec{e}_y)$.

1.7 a) Le point A est sous une hauteur h d'huile de masse volumique ρ_h par rapport à la surface. La pression en A vaut donc : $p_A = p_{\text{atm}} + \rho_h g h$. Le volume V_h d'huile occupe la hauteur h dans le tube de section s telle que : $V_h = sh$. On obtient ainsi $p_A = p_{\text{atm}} + \rho_h g \frac{V_h}{s}$.

1.7 b) Le point B est sous une hauteur d_1 d'eau de masse volumique ρ_e par rapport à A, la pression en B vaut donc : $p_B = p_A + \rho_e g d_1$.

1.7 c) Le point C est sous une hauteur d_2 d'eau par rapport à la surface. La pression en C vaut donc :

$$p_C = p_{\text{atm}} + \rho_e g d_2.$$

De plus, les points B et C sont à la même altitude dans le même fluide donc $p_B = p_C$.

1.7 d) À partir des expressions de p_A , p_B et p_C obtenues précédemment, la relation $p_B = p_C$ donne :

$$p_{\text{atm}} + \rho_h g \frac{V_h}{s} + \rho_e g d_1 = p_{\text{atm}} + \rho_e g d_2.$$

Il en découle : $d_2 - d_1 = \frac{\rho_h V_h}{\rho_e s}$.

1.8 a) La pression qui règne dans un liquide incompressible s'écrit $p(M) = p_0 + \rho g h_M$ où h_M est la profondeur du point M depuis la surface libre soumise à une pression p_0 . Ainsi, au fond du récipient, on a $p = p_0 + \rho g H$.

1.8 b) En plongeant le solide dans le liquide, on modifie la hauteur de liquide. Notons H' cette nouvelle hauteur. On obtient H' en traduisant l'additivité des volumes :

$$SH + sh = SH' \quad \text{soit} \quad H' = H + \frac{s}{S}h.$$

Finalement, la pression au fond du récipient vaut

$$p = p_0 + \rho g H' = p_0 + \rho g \left(H + \frac{s}{S}h \right).$$

1.9 a) On a $\|\vec{\Pi}\| = m_{\text{gly}} \times g = \rho_{\text{gly}} \times V_{\text{immergé}} \times g$ avec $V_{\text{immergé}} = a^3$. Finalement, on trouve

$$\|\vec{\Pi}\| = \rho_{\text{gly}} \times a^3 \times g = 1,2 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{cm}^{-3} \times (10 \text{ cm})^3 \times 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 12 \text{ N}.$$

1.9 b) On a $\|\vec{\Pi}\| = m_{\text{savon}} \times g = \rho_{\text{savon}} \times V_{\text{immergé}} \times g$ avec $V_{\text{immergé}} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi a^3$. Finalement, on trouve

$$\|\vec{\Pi}\| = \frac{2}{3}\rho_{\text{savon}} \times \pi a^3 g = \frac{2}{3} \times 2,5 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{cm}^{-3} \times \pi \times (10 \text{ cm})^3 \times 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 51 \text{ N}.$$

1.9 c) On a $\|\vec{\Pi}\| = m_{\text{eau}} \times g = \rho_{\text{eau}} \times V_{\text{immergé}} \times g$ avec $V_{\text{immergé}} = \frac{2}{3}\pi a^2 h$ avec $h = 4a$. Finalement, on trouve

$$\|\vec{\Pi}\| = \frac{8}{3}\rho_{\text{eau}} \times \pi a^3 g = \frac{8}{3} \times 1,0 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{cm}^{-3} \times \pi \times (10 \text{ cm})^3 \times 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 82 \text{ N}.$$

1.10 En notant $\vec{P}$ le poids du solide et $\vec{\Pi}$ la poussée d'Archimède qui s'exerce sur lui, la condition d'équilibre assure $\vec{P} + \vec{\Pi} = \vec{0}$. Par projection sur l'axe vertical, on obtient $m_S g - m_L g = 0$ avec m_L la masse de fluide déplacé par le glaçon. En faisant apparaître les masses volumiques, l'équation $m_S = m_L$ devient $\rho_S V_S = \rho_L V_{\text{imm}} : \textcircled{b}$.

1.11 a) La pression ne dépend que de z , par conséquent les forces de pression qui s'exercent sur les faces latérales verticales se compensent. Aussi a-t-on $R_x = 0$.

1.11 b) Pour les mêmes raisons que précédemment, $R_y = 0$.

1.11 c) Rappelons que la pression vérifie la loi $p(z) = p_0 + \rho g z$ avec p_0 la pression qui règne à la surface libre. Faisons un bilan des forces qui agissent sur les faces horizontales du cube. La face du dessus ressent la force $\vec{F}_1 = (p_0 + \rho g z_1) a^2 \vec{e}_z$ alors que la face du dessous subit une force pressante $\vec{F}_2 = -(p_0 + \rho g z_2) a^2 \vec{e}_z$. Ainsi, la résultante des forces pressantes verticale vaut

$$R_z = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \cdot \vec{e}_z = -\rho g a^2 (z_2 - z_1) = -\rho g a^3.$$

1.11 d) On trouve donc $\vec{R} = -\rho g a^3 \vec{e}_z$. L'immersion du solide déplace un volume a^3 de liquide qui a pour masse $m = \rho a^3$ et poids $\vec{P}_d = \rho a^3 g \vec{e}_z = \rho a^3 g \vec{e}_z$. Ainsi on trouve $\vec{R} = -\vec{P}_d$ conformément au principe d'Archimède.

1.12 a) Avant immersion, on a $\vec{T} + \vec{P} = \vec{0}$ où $\vec{P}$ est le poids du solide. Après, on a $\vec{T}' + \vec{P} + \vec{\Pi} = \vec{0}$ où $\vec{\Pi}$ est la poussée d'Archimède. On en déduit

$$\vec{\Pi} = \vec{T} - \vec{T}' \quad \text{soit} \quad \|\vec{\Pi}\| = \|\vec{T} - \vec{T}'\| = 10 \text{ N} - 8 \text{ N} = 2 \text{ N}.$$

1.12 b) On a vu que le poids vaut $P = 10 \text{ N}$ et la poussée d'Archimède $\Pi = 2 \text{ N}$. Or, on a

$$P = \rho_s V g \quad \text{et} \quad \Pi = \rho_e V g \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \rho_s & \text{masse volumique du solide} \\ \rho_e & \text{masse volumique de l'eau.} \end{cases}$$

Le rapport de ces deux relations donne immédiatement la densité du solide : $d = \frac{\rho_s}{\rho_e} = \frac{P}{\Pi} = 5$.

1.13 a) Le poids du bloc solide vaut $\vec{P} = \rho_s S h \vec{g}$. La poussée d'Archimède est l'opposée du poids de liquide déplacé, à savoir $\vec{\Pi} = -\rho_\ell S(h-x) \vec{g}$. Ainsi, la résultante des forces vaut $\vec{R} = [\rho_s h - \rho_\ell(h-x)] S \vec{g}$.

1.13 b) La condition d'équilibre mécanique $\vec{R} = \vec{0}$ donne $\rho_s h - \rho_\ell(h-x) = 0$ et donc $x = h \left(\frac{\rho_\ell - \rho_s}{\rho_\ell} \right)$.

1.13 c) La résultante des forces vaut maintenant $\vec{R} = \vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{F}$. En faisant $x = 0$ dans l'expression obtenue à la question a), on trouve

$$\vec{R} = (\rho_s h - \rho_\ell h) S \vec{g} + \vec{F}.$$

La condition d'équilibre $\vec{R} = \vec{0}$ donne alors $\vec{F} = (\rho_\ell h - \rho_s h) S \vec{g}$, d'où $\|\vec{F}\| = |(\rho_\ell h - \rho_s h) S| g = (\rho_\ell - \rho_s) S h g$.

1.14 a) La proposition (a) est homogène car ρ_s/ρ_e est sans dimension et h est homogène à une longueur.

La formule (b) n'est pas homogène à cause de la racine cubique.

La formule (c) n'est pas homogène non plus car on ajoute une longueur (h) à une masse volumique (ρ_s).

Enfin, la proposition (d) n'est pas homogène car le produit d'une masse volumique par une longueur ne peut pas donner une longueur.

1.14 b) Le volume immergé s'écrit $V_{\text{imm}} = \frac{1}{3} S' (h-x)$ où S' est l'aire de la base du volume conique immergé. Si l'on note r' le rayon de cette base, on a

$$\frac{S'}{S} = \left(\frac{r'}{r} \right)^2 = \left(\frac{h-x}{h} \right)^2,$$

où la dernière égalité utilise les relations de Thalès (r est le rayon de la base de l'iceberg et r' celui du cône immergé). On en déduit

$$V_{\text{imm}} = \frac{1}{3} \frac{S(h-x)^3}{h^2}.$$

1.14 c) Le poids du cône vaut $\vec{P} = m \vec{g}$ avec $m = \frac{1}{3} S h \rho_s$ et S l'aire de la base du cône.

Quant à la poussée d'Archimède, on a $\vec{\Pi} = -m_d \vec{g}$ où m_d désigne la masse de liquide déplacé par l'immersion du cône. On a $m_d = \rho_e V_{\text{imm}} = \frac{1}{3} \frac{S(h-x)^3}{h^2} \rho_e$ d'où $\vec{\Pi} = -\frac{1}{3} \frac{S(h-x)^3}{h^2} \rho_e \vec{g}$. La condition d'équilibre $\vec{\Pi} + \vec{P} = \vec{0}$ donne

$$\left[\frac{1}{3} S h \rho_s - \frac{1}{3} S \frac{(h-x)^3}{h^2} \rho_e \right] \vec{g} = \vec{0} \quad \text{d'où} \quad x = h \left(1 - \sqrt[3]{\frac{\rho_s}{\rho_e}} \right).$$

1.15 a) La masse m_B peut se décomposer en notant m_{liq} la masse de la partie liquide et $m_{\text{glaçon}}$ celle des glaçons :

$$m_B = m_{\text{liq}} + m_{\text{glaçon}} = \rho_e(V_{\text{tot}} - V_{\text{im}}) + m_{\text{glaçon}},$$

en notant ρ_e la masse volumique de l'eau, V_{tot} le volume total du verre (égal à celui du verre A) et V_{im} le volume immergé des glaçons.

Par ailleurs, l'équilibre mécanique des glaçons donne d'après le PFD : $m_{\text{glaçon}} = \rho_e V_{\text{im}}$. Ainsi, $m_B = \rho_e V_{\text{tot}} = m_A$.

1.15 b) Le polystyrène étant moins dense que la glace il est aussi moins dense que l'eau. Par conséquent, les boules flottent. Ayant la même masse que les glaçons, les boules de polystyrène présenteront un volume immergé identique à la situation précédente. La hauteur sera donc identique.

1.15 c) Le fer est plus dense que l'eau, donc les boules coulent. On note V_{sb1} et V_{sb2} respectivement les volumes submergés avec les glaçons et avec les boules de fer. On a les relations :

$$V_{\text{sb1}} = V_{\text{liq}} + V_{\text{im}} \quad \text{et} \quad V_{\text{sb2}} = V_{\text{liq}} + V_{\text{Fe}}.$$

De plus, comme les boules de fer sont de même masse que les glaçons : $m_{\text{glaçon}} = \rho_e V_{\text{im}} = m_{\text{Fe}} = \rho_{\text{Fe}} V_{\text{Fe}}$ en notant ρ_{Fe} la masse volumique du fer et V_{Fe} leur volume. Ainsi : $V_{\text{Fe}} = \left(\frac{\rho_e}{\rho_{\text{Fe}}}\right) V_{\text{im}}$. Ainsi, on a

$$V_{\text{sb2}} = V_{\text{liq}} + \left(\frac{\rho_e}{\rho_{\text{Fe}}}\right) V_{\text{im}}$$

avec $\frac{\rho_e}{\rho_{\text{Fe}}} < 1$. Ainsi, $V_{\text{sb2}} < V_{\text{sb1}}$: le niveau diminue.

1.16 a) On a

$$\frac{\partial(p_0 + Az)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial(p_0 + Az)}{\partial y} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial(p_0 + Az)}{\partial z} = A.$$

On en déduit $\vec{\text{grad}}(p) = A\vec{e}_z$.

1.16 b) On a

$$\frac{\partial(Bxy^2 + Ce^{2z})}{\partial x} = By^2, \quad \frac{\partial(Bxy^2 + Ce^{2z})}{\partial y} = 2Bxy \quad \text{et} \quad \frac{\partial(Bxy^2 + Ce^{2z})}{\partial z} = 2Ce^{2z}.$$

Par conséquent, $\vec{\text{grad}}(p) = By^2\vec{e}_x + 2Bxy\vec{e}_y + 2Ce^{2z}\vec{e}_z$.

1.17 a) La masse molaire d'un mélange s'obtient en effectuant la moyenne pondérée des masses molaires :

$$\begin{aligned} M &= 0,96M(\text{CO}_2) + 0,02M(\text{Ar}) + 0,02M(\text{N}_2) \\ &= 0,96 \times 44 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} + 0,02 \times 40 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} + 0,02 \times 28 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} = 43,6 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}. \end{aligned}$$

1.17 b) En partant de l'équation d'état des gaz parfaits, on a :

$$pV = nRT = \frac{m}{M}RT \quad \text{donc} \quad \frac{pM}{RT} = \frac{m}{V} = \rho.$$

L'application numérique donne : $\rho = \frac{6 \times 10^2 \text{ Pa} \times 43,6 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}}{8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \times 213,15 \text{ K}} = 14,8 \text{ g} \cdot \text{m}^{-3}$.

1.17 c) On remplace ρ par son expression trouvée précédemment et on obtient alors une équation différentielle du premier ordre :

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = -\frac{Mg}{RT}p \quad \text{donc} \quad \frac{dp}{dz} + \frac{p}{z_0} = 0.$$

Ainsi, on a

$$p(z) = p_0 \exp\left(-\frac{z}{z_0}\right) \quad \text{avec} \quad z_0 = \frac{RT}{Mg}.$$

1.17 d) On calcule $H = 5z_0 = 5 \frac{8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \times 213,15 \text{ K}}{43,6 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1} \times 3,72 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}} = 55 \text{ km}.$

1.18 a) En effet, on a $\frac{dp}{dz} = \frac{p(z+dz) - p(z)}{dz}$, ce qui donne l'équation différentielle $\frac{dp}{dz} = -\frac{2p}{z_{\max}}.$

1.18 b) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du type $y' + ay = 0.$

La solution s'écrit $p(z) = A e^{-2z/z_{\max}}$ avec A une constante d'intégration que l'on détermine à l'aide de la contrainte $p(z=0) = p_0$. On trouve $p(z) = p_0 e^{-2z/z_{\max}}.$

1.19 a) La projection de l'équation de la statique sur les axes (Ox) et (Oy) donne $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0$. Le champ de pression ne dépend donc que de z . La projection selon (Oz) donne alors

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = -\frac{ag}{p_0}p.$$

Par conséquent, on aboutit à l'équation différentielle

$$\frac{dp}{dz} + \frac{ag}{p_0}p = 0.$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre dont les solutions s'écrivent $p(z) = C_1 e^{-agz/p_0}.$

On détermine la constante d'intégration C_1 à l'aide des conditions aux limites :

$$p(z=0) = p_0 = C_1 \quad \text{d'où} \quad p(z) = p_0 e^{-agz/p_0}.$$

1.19 b) Pour les mêmes raisons que précédemment, le champ de pression ne dépend que de z . La projection de l'équation de la statique suivant (Oz) donne

$$\frac{dp}{dz} + bgp = -ag + bgp_0.$$

C'est une équation différentielle linéaire du première ordre avec un second membre constant. Les solutions de l'équation homogène se mettent sous la forme $p_h(z) = C_2 e^{-bgz}$, et il est facile de trouver une solution particulière constante : $p_{\text{part}} = p_0 - \frac{a}{b}$. La solution générale s'écrit donc

$$p(z) = p_h(z) + p_{\text{part}} = C_2 e^{-bgz} + p_0 - \frac{a}{b}.$$

Il ne nous reste plus qu'à déterminer C_2 à l'aide de la condition aux limites :

$$p(z=0) = p_0 = C_2 + p_0 - \frac{a}{b} \quad \text{d'où} \quad p(z) = p_0 + \frac{a}{b}(e^{-bgz} - 1).$$

1.19 c) À nouveau, le champ de pression ne dépend que de z . La projection de l'équation de la statique suivant (Oz) donne

$$\frac{dp}{dz} = -ag + bge^{-z/c}.$$

On obtient $p(z)$ en cherchant la primitive de $-ag + bge^{-z/c}$, à savoir : $p(z) = -agz - bcge^{-z/c} + C_3$.

La condition $p(0) = p_0$ impose $bcg + C_3 = p_0$ soit $C_3 = p_0 - bcg$. Finalement, on trouve :

$$p(z) = p_0 - agz + bcg(1 - e^{-z/c}).$$

1.20 a) Projetons l'équation de la statique sur les trois axes cartésiens : on trouve

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho a \quad \text{et} \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g.$$

La première relation implique que le champ de pression ne dépend que de y et z .

Intégrons la deuxième relation :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho a \quad \text{donc} \quad p(y, z) = \rho ay + f(z).$$

Dérivons cette dernière relation par rapport à z : $\frac{\partial p}{\partial z} = f'(z)$. Par identification avec la troisième projection, on trouve

$$f'(z) = -\rho g \quad \text{donc} \quad f(z) = -\rho gz + C.$$

Le champ de pression se met sous la forme $p(y, z) = \rho ay - \rho gz + C$. Déterminons la constante d'intégration C à l'aide de la condition aux limites :

$$p(y = 0, z = 0) = p_0 = C \quad \text{d'où} \quad p(y, z) = \rho(ay - gz) + p_0.$$

1.20 b) La surface libre est l'ensemble des points du liquide soumis à une pression p_0 :

$$p(y, z) = \rho(ay - gz) + p_0 = p_0 \quad \text{donne} \quad z = \frac{a}{g}y.$$

Il s'agit de l'équation d'un plan incliné d'un angle $\alpha = \arctan(a/g)$.

1.21 a) On calcule

$$\begin{aligned} F_p &= \iint p(z) \, dy \, dz = \iint \rho g(h - z) \, dy \, dz \\ &= \rho g \int_0^L dy \int_0^h (h - z) \, dz = \rho g L \left[hz - \frac{z^2}{2} \right]_0^h \\ &= \rho g L \left(h^2 - \frac{h^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \rho g L h^2. \end{aligned}$$

1.21 b) On calcule

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_p &= \iint z p(z) \, dy \, dz = \iint \rho g(hz - z^2) \, dy \, dz \\ &= \rho g \int_0^L dy \int_0^h (hz - z^2) \, dz = \rho g L \left[\frac{hz^2}{2} - \frac{z^3}{3} \right]_0^h \\ &= \rho g L \left(\frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{3} \right) = \frac{1}{6} \rho g L h^3. \end{aligned}$$

1.21 c) On a $z_C = \frac{\mathcal{M}_p}{F_p} = \frac{\frac{1}{6} \rho g L h^3}{\frac{1}{2} \rho g L h^2} = \frac{1}{3} h$.