Partie reconduite du programme précédent

Plan du cours

Espaces vectoriels sur $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- Somme de deux sous-espaces, somme directe, sous-espaces supplémentaires.

Espaces de dimension finie

- Définition d'espace de dimension finie.
- Parties libres maximales, génératrices minimales. Equivalence avec la notion de base.
- Bases canoniques, coordonnées.
- Théorème de la base incomplète. Existence de base.
- Dimension d'un espace de dimension finie. Droites, plans.
- Caractérisation d'une base quand la dimension est connue.
- Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie. Cas d'égalité.

Remarques. Pas encore la formule de Grassman, ni de caractérisation des supplémentaires en dimension finie. Pas encore de rang d'une famille.

Questions de cours

Somme de sous-espaces : Th sur la somme de deux sous-evs, déf et caractérisation d'une somme directe (+démo), déf de ss-evs supplémentaires.

Parties "optimales" : Au choix de l'examinateur/rice
- définir partie libre maximale et montrer "libre maximale $\implies$ base"

ou bien
- définir génératrice minimale et montrer "génératrice minimale $\implies$ base".

Notion de base : Définition de base. Existence et unicité des coordonnées (à démontrer). Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}_n[X]$.

Notion de dimension : Lemme de Steinitz (lien entre cardinal d'une famille génératrice et d'une famille libre), définition de dimension, justification de la déf.
Caractérisation d'une base quand on connaît la dimension (énoncé+démo).

Nouvelle partie

Plan du cours

Espaces de dimension finie

- Obtention de supplémentaires par "découpage" d'une base. Base adaptée à une décomposition.
- Existence d'un supplémentaire en dimension finie. Formule de Grassmann.
- Caractérisation de la supplémentarité par intersection et somme des dimensions.
- Rang d'une famille de vecteurs. Obtention par la méthode de Gauss sur les vecteurs colonnes des coordonnées.

Polynômes

- Définition, opérations sur les polynômes, polynômes dérivés,structure d'esp. vect., formules sur le degré.
- Fonctions polynomiales, racines d'un polynôme.
- Formule de Taylor.
- Division euclidienne, divisibilité par $X-a$, par $(X-x_1)\cdots(X-x_n)$ (x_i distincts). Conséquence sur le nombre de racines distinctes.

Remarque. Pas encore de racine d'ordre supérieur ni de factorisation de polynômes.

Questions de cours

Formule de Grassman : Énoncé et démonstration

Obtention de supplémentaires par "découpage" d'une base. Enoncé et démonstration.

Opérations sur les polynômes et degré : Formule de calcul des coefficients d'un produit de polynômes. Définition du polynôme dérivé.
Degré d'un produit, d'une somme, d'un polynôme composé, d'un polynôme dérivé (r fois).

Formule de Taylor : Enoncé. Démonstration dans le cas des polynômes $E_p=X^p$.

Division euclidienne et divisibilité par $X-a$: Enoncé de la division euclidienne. Condition de divisibilité par $X-a$ (à démontrer).