

## Partie reconduite du programme précédent

## PLAN DU COURS

## Couples de variables aléatoires

- Définition, loi conjointe, lois marginales, loi conditionnelle.
- Indépendance, indépendance mutuelle, espérance du produit de deux v.a. indépendantes.
- Covariance, variance d'une somme, cas de v.a. indépendantes.

---

## QUESTIONS DE COURS

**Lois d'un couple de v.a. :** Définition de couple de v.a., loi conjointe, lois marginales.

Exemple : Une urne contient trois boules indiscernables numérotées 1,2,3. On tire successivement avec remise deux boules. On note  $X_1$  (resp.  $X_2$ ) le numéro de la première (resp. seconde) boule. On pose  $X = X_1$  et  $Y = \min(X_1, X_2)$ .

Déterminer la loi conjointe puis les lois marginales du couple  $Z = (X, Y)$  (à représenter dans un tableau).

**Indépendance :** Définition d'indépendance, d'indépendance mutuelle. Conséquence sur  $E(XY)$  (à démontrer). Remarque sur la réciproque.

**Covariance.** Définition. Démonstration des formules  $cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$  et  $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2cov(X, Y)$

## Nouvelle partie

## PLAN DU COURS

## Intégration

- Intégration des fonctions en escalier, des fonctions continues
- Linéarité, relation de Chasles.
- Positivité et croissance de l'intégrale. Amélioration pour obtenir une inégalité stricte.
- Inégalité de la moyenne. Majoration de  $|\int_a^b f g|$ ; cas particulier :  $|\int_a^b f| \leq |b-a| \sup f$ .
- Sommes de Riemann  $S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k \frac{b-a}{n})$  et  $T_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(a + k \frac{b-a}{n})$ .
- Primitives d'une fonction continue. Expression de l'unique primitive s'annulant en  $a$  fixé.
- Intégration par parties. Changement de variable.
- Formule de Taylor avec reste intégral, inégalité de Taylor-Lagrange.
- Méthode de dérivation d'une fonction du type  $x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$ .

**Remarques aux colleuses et colleurs.** La décomposition en éléments simples générale n'est pas au programme. La forme éventuelle devra donc être donnée.

Les élèves savent seulement gérer le cas de pôles simples.

Les méthodes d'intégration des fractions rationnelles en cosinus ou sinus, celles des racines de fonctions homographiques ou des racines de polynômes du second degré sont hors programme. Les changements de variable éventuels devront donc être donnés.

---

## QUESTIONS DE COURS

**Positivité d'une intégrale :** Énoncer les deux résultats de positivité d'une intégrale (version large puis stricte). Démontrer le cas "strict".

**Convergence des sommes de Riemann :** Démonstration de la convergence dans le cas d'une fonction lipschitzienne.

**Inégalité de Taylor-Lagrange.** Énoncé et démonstration. Application à la fonction exp sur  $[0, x]$ .

**Techniques de calcul :** Énoncer les formules d'intégration par partie et de changement de variable.

Expliquer la méthode de dérivation de  $x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$ .

---