

Partie reconduite du programme précédent

PLAN DU COURS

Nombres réels

- Majorant, minorant d’une partie. Plus grand/petit élément. Borne supérieure/inférieure.
- Caractérisation de la borne supérieure avec des quantificateurs (une par tout autre majorant est plus grand, la deuxième par tout nombre strict inférieur n’est pas majorant) ; caractérisation séquentielle.
- Caractérisation des intervalle de \mathbb{R} . Propriété de la borne supérieure dans \mathbb{R} .
- Définition de la partie entière (comme maximum), caractérisation.
- Existence de valeur décimale approchée par excès et par défaut. Corollaire : tout réel est limite d’une suite de rationnels.

Remarques aux colleurs et colleuses : La notion générale de densité n’est pas au programme.

Fondements des suites réelles

- Généralités : suites et opérations sur les suites, suites majorées, minorées, bornées ; suites monotones.
- Suite convergente, divergente (première et deuxième espèce), appartenance à partir d’un certain rang à un intervalle contenant strictement la limite, unicité de la limite.
- Caractère borné d’une suite convergente, majoration en val. abs. par une suite de limite nulle, passage à la limite dans une inégalité.
- Opérations sur les limites, produit d’une suite bornée et d’une suite de limite nulle, somme d’une suite de limite $+\infty$ et d’une suite minorée.

Suites réelles : outils essentiels

- Suites arithmético-géométriques et récurrentes linéaires d’ordre 2.
- Relations de comparaison sur les suites réelles à **termes non nuls**.
 - Equivalence, négligeabilité, domination.
 - Propriétés des suites équivalentes (limite, signe)
 - Compatibilité de l’équivalence avec produit et quotient. Equivalent $v_n + \alpha_n \sim v_n$ si $\alpha_n = o(v_n)$.
 - Exemples fondamentaux : croissance comparée, équivalents “classiques”.

Remarques aux colleurs et colleuses : Suites adjacentes et suites extraites n’ont pas encore été vues. Les développements limités seront vus ultérieurement. Veuillez à ne pas mettre d’exercices qui pourraient les nécessiter.

QUESTIONS DE COURS

- Borne supérieure d’une partie de \mathbb{R} :** Définition. Énoncer la caractérisation séquentielle. Énoncer le théorème de la borne supérieure dans \mathbb{R} .
- Limites et somme :** définitions de limites finies et infinies avec explication sur des schémas. Limite d’une somme de suites convergentes (à démontrer).
- Suites récurrentes linéaires d’ordre 2 :** Énoncé complet donnant le terme général d’une suite récurrente linéaire d’ordre 2 (sans démo)
- Exemples fondamentaux de comparaison de suites :** Prop de croissance comparée, cas d’une limite finie, équivalents classiques avec sin, exp, ln, racine carré et puissance α .
Equivalent de $u_n + \alpha_n$ lorsque $\alpha_n = o(u_n)$ (à démontrer)

Nouvelle partie

PLAN DU COURS

Suites réelles : outils essentiels

- Théorème de la limite monotone, théorème des gendarmes, suites adjacentes.
- Suites extraites, condition nécessaire de convergence, réciproque partielle (à partir des suites $(u_{2p})_p$ et $(u_{2p+1})_p$).

Entiers, arithmétique et rationnels

- Division euclidienne dans \mathbb{N} .
- Divisibilité, réflexivité, transitivité, ptés de compatibilité avec somme, produit ; caractérisation en terme de reste nul.
- PGCD de deux naturels non tous nuls, algorithme d’Euclide. PPCM de deux naturels non nuls.
- Nombres premiers : définition, théorème d’Euclide, décomposition primaire.
- Application aux PGCD et PPCM : décomposition primaire commune à deux entiers (avec des exposants éventuellement nuls), expression des PGCD et PPCM, produit des PGCD et PPCM.
- Les nombres rationnels : définition, écriture irréductible, sous-ensemble des décimaux.

Remarques aux colleurs et colleuses : Les notions de PGCD et PPCM sont brièvement introduites : pas de nbs premiers entre eux, pas de th de Bézout ni de th de Gauss, aucune référence aux “ $a\mathbb{Z}$ ”. Les congruences ne sont pas au programme.

QUESTIONS DE COURS

- Théorème de la limite monotone :** Énoncé général pour une suite croissante, démonstration dans le cas croissant majoré.
- Suites adjacentes :** Énoncer et démontrer le résultat.
- Présentation des suites extraites :** Définition, exemples.
Condition nécessaire de convergence, application à détailler : la suite $((-1)^n)_n$ n’a pas de limite. Énoncé de la réciproque partielle.
- Division euclidienne :** Énoncé dans \mathbb{N} . Preuve.
- Décomposition primaire :** Énoncer le th de décomposition primaire des naturels. Démonstration de l’existence par récurrence forte.