Partie reconduite du programme précédent

Plan du cours

Limite d'une fonction, continuité en un point

- Notion de limite : définition de limite finie en un point, continuité en un point, prolongement par continuité ; limites finies en l'infini ; propriétés des limites finies : unicité, caractère borné.
- Limite finie/ continuité en un point, prolongement par continuité ; limites finies en l'infini ; propriétés des limites finies.
- Limites infinies : six définitions.
- Limites à droite et à gauche, caractérisation de limite et de continuité.
- Théorèmes opératoires sur les limites finies/infinies, sur les fonctions continues en un point.
- Limite de l'image d'une suite par une fonction.
- Composition de limite.
- Limites et inégalités.
- Théorème de la limite monotone.

Remarques aux colleurs et colleuses : les notions de négligeabilité et d'équivalence n'ont pas encore été vues sur les fonctions.

Pas encore de th des valeurs intermédiaires ni de continuité sur un segment.

Questions de cours

Notion de limite finie : Définitions symboliques de limite finie en a, en $-\infty$ et en $+\infty$.
Alternative (continuité ou prolongement) à énoncer.

Produit de limites finies : Démontrer que si f et g ont pour limites ℓ et ℓ' alors fg a pour limite $\ell\ell'$.

Image d'une suite par une fonction : Énoncé du théorème et du corollaire (extension à la continuité). Application : montrer que la fonction $x \mapsto \sin(x)$ n'a pas de limite en $+\infty$.

Propriétés liées à l'ordre : Énoncer la propriété de stabilité des inégalités, le th d'encadrement.
Énoncer le th de limite monotone avec deux schémas types.

PCSI 1 — Colles de mathématiques : semaine du 15/12

Nouvelle partie

Plan du cours

Relations de comparaison entre fonctions :

On se place dans le cadre de fonctions définies et ne s'annulant pas au voisinage de $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Les définitions de négligeabilité et d'équivalence sont introduites au moyen de limites de quotients.

- Fonctions négligeables : définition, exemple des fonctions puissances, croissance comparée, substitution de la variable par une fonction ou par une suite.
- Équivalence des fonctions
  - Définition, propriété fondamentale de conservation de la limite, signe.
  - Équivalent de f admettant une limite finie non nulle, utilisation de la dérivabilité, catalogue d'équivalents classiques.
  - Si $g = o(f)$ alors $f + g \sim f$, compatibilité avec la valeur absolue, le produit, le quotient, les fonctions puissances.
  - Substitution de la variable par une autre variable ou par une suite.

Développements limités

- Définition de DL en 0, en x_0. Exemple de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$.
- Propriétés élémentaires : convergence, troncature, unicité, parité.
- Fonctions de classe $\mathscr{C}^n$. Formule de Taylor-Young (admise).
- DL usuels. Les DL en 0 des fonctions suivantes sont à connaître à tout ordre : exp, sin, cos, $x \mapsto (1+x)^\alpha$ (en particulier $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$), $x \mapsto \ln(1+x)$.
- Opérations sur les DL : combinaison linéaire, produit. Exemple de ch, sh.
- Opérations sur les DL (suite) : intégration (ex de Arctan), composée, quotient (ex du $DL_3(0)$ de tan).

Remarques aux colleurs et colleuses : Le calcul de dérivées n-èmes n'est pas un objectif pour le moment.

L'utilisation des DL pour l'obtention de tangentes ou d'asymptotes obliques n'a pas encore été vue.

Questions de cours

Fonctions négligeables et équivalentes : Définitions des deux notions.
Exemples fondamentaux : comparaison de x^α et x^β quand $x \to 0$ et quand $x \to +\infty$, équivalent de f admettant une limite finie, th d'utilisation de la dérivabilité pour déterminer un équivalent.

Développements limités usuels : Donner les DL (à tout ordre) de exp, sin, cos, $x \mapsto (1+x)^\alpha$ (en particulier $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$) et $x \mapsto \ln(1+x)$.

Somme et produit de DL : Enoncer les propriétés concernant somme et produit de $DL_n(0)$. Application à $\mathrm{sh}(x)$ à l'ordre $2n+2$.

Intégration de DL : Énoncer la propriété d'intégration de $DL_n(0)$. Application : DL de Arccos à l'ordre 6 à calculer.

Quotient de DL : Expliquer la méthode et l'appliquer au $DL_3(0)$ de tan.