

Partie reconduite du programme précédent

PLAN DU COURS

Suites itératives

- Notions d'intervalle stable et de point fixe. Conséquences sur la suite et les limites finies éventuelles.
- Utilisation du caractère lipschitzien de f (obtenu à l'aide de l'inégalité des accroissements finis) pour montrer la convergence.
- Quelques pistes d'étude pour le cas général de u définie par $u_{n+1} = f(u_n)$:
 - Monotonie de u à l'aide de $x \mapsto f(x) - x$ ou de la croissance de f .
 - Utilisation du théorème de limite monotone.
 - Cas de f décroissante.

Polynômes

- Définition, opérations sur les polynômes, polynômes dérivés, formules sur le degré.
- Fonctions polynomiales, racines d'un polynôme.
- Formule de Taylor.
- Division euclidienne, divisibilité par $X - a$, par $(X - x_1) \cdots (X - x_n)$ (x_i distincts). Conséquence sur le nombre de racines distinctes.

Remarques aux colleurs et colleuses. Pas encore de racines multiples, ni de décomposition en irréductibles.

QUESTIONS DE COURS

Deux notions fondamentales pour les suites itératives : Définition d'intervalle stable. Application à énoncer.

Définition de point fixe. Application à justifier.

Une étude de suite itérative : Prouver la convergence de la suite u définie par $u_0 \geq 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2 + u_n}$ (inégalité des accroissements finis à utiliser).

Opérations sur les polynômes et degré : Formule de calcul des coefficients d'un produit de polynômes. Définition du polynôme dérivé.

Degré d'un produit, d'une somme, d'un polynôme composé, d'un polynôme dérivé (r fois).

Formule de Taylor : Énoncé. Démonstration dans le cas des polynômes $E_p = X^p$.

Divisibilité : Énoncé de la division euclidienne.

Condition de divisibilité par $X - a$ (à démontrer),

Condition de divisibilité par $(X - x_1) \cdots (X - x_n)$, x_i distincts (sans démonstration).

Conséquence sur le nb de racines *distinctes* d'un polynôme (sans démonstration).

Nouvelle partie

PLAN DU COURS

Polynômes

- Racine d'ordre supérieur : définition en terme de divisibilité, caractérisation par les dérivées. Conséquence sur le nombre de racines (avec multiplicité).
- Polynôme irréductible. Décomposition en irréductibles sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$.
- Somme et produit des racines.

QUESTIONS DE COURS

Racines d'ordre supérieur : Définition. Caractérisations par annulation des polynômes dérivés. Démonstration d'une des implications *au choix de l'examineur/rice*.

Autour de la décomposition en irréductibles : Énoncer le théorème de d'Alembert-Gauss.

Énoncer les deux résultats de décomposition (dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$).

Expliquer succinctement comment passer de la décomposition dans $\mathbb{C}[X]$ à celle dans $\mathbb{R}[X]$ (on exprimera $(X - z)(X - \bar{z})$.)

Décomposition de $X^n - 1$: Donner la décomposition de $X^n - 1$ sur $\mathbb{C}$. En déduire celle sur $\mathbb{R}$ dans le cas n pair. On s'aidera d'une représentation graphique des racines.

Somme et produit des racines : Énoncer le théorème. Exemple de $X^n - 1$.