

Partie reconduite du programme précédent

PLAN DU COURS

Espaces vectoriels sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- Définition, règles de calcul.
- Exemples de référence : $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathcal{F}(A, \mathbb{K})$ où A ensemble, $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, suites.
- Sous-espaces vectoriels, intersection de sous-espaces, exemples de sous-espaces : fonctions continues, dérivables, fonctions polynomiales, solutions d'une EDLH ; suites convergentes, convergentes vers 0, suites récurrentes linéaires d'ordre 2.
- Combinaisons linéaires. Espaces vectoriels engendrés, familles génératrices.
- Familles libres, cas des familles à 1 ou 2 vecteurs.
- Somme de deux sous-espaces, somme directe, sous-espaces supplémentaires.

Remarque. La notion de dimension finie n'a pas encore été vue.

QUESTIONS DE COURS

Sous-espace vectoriel : définition de sous-espace vectoriel. Exemple des polynômes de $\mathbb{K}_4[X]$ s'annulant en a et b fixés et distincts (à démontrer avec la déf de sous-espace).

Espace vectoriel engendré : Définir $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ et démontrer que c'est un sous-espace de E .

Famille génératrice/libre : Définition de famille génératrice, deux ptés d'invariance à énoncer (adjonction d'un vecteur de l'esp engendré, ajout d'une CL des autres)

Définition de famille libre. Caractérisation pour 1 ou 2 vecteurs.

Vers les supplémentaires : Déf et caractérisation d'une somme directe (à démontrer), déf de ss-evs supplémentaires.

Exemple de supplémentaires : On pose $F = \{(x, y, z) | 2x - 4y + 3z = 0\}$ et $G = \text{Vect}((1, 0, -1))$.
Montrer par analyse-synthèse que les sous espaces F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Nouvelle partie

PLAN DU COURS

Espaces de dimension finie

- Définition d'espace de dimension finie.
- Parties libres maximales, génératrices minimales. Equivalence avec la notion de base.
- Bases canoniques, coordonnées.
- Théorème de la base incomplète. Existence de base.
- Dimension d'un espace de dimension finie. Droites, plans.
- Caractérisation d'une base quand la dimension est connue.
- Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie. Cas d'égalité.
- Obtention de supplémentaires par "découpage" d'une base. Base adaptée à une décomposition.
- Existence d'un supplémentaire en dimension finie. Formule de Grassmann.
- Caractérisation de la supplémentarité par intersection et somme des dimensions.
- Rang d'une famille de vecteurs. Obtention par la méthode de Gauss sur les vecteurs colonnes des coordonnées.

QUESTIONS DE COURS

Notion de base : Définition de base. Existence et unicité des coordonnées (à démontrer). Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}_n[X]$.

Notion de dimension : Lemme de Steinitz (lien entre cardinal d'une famille génératrice et d'une famille libre), définition de dimension, justification de la déf.
Caractérisation d'une base quand on connaît la dimension.

Découpage de base et base adaptée : Énoncer et démontrer la propriété sur les ss-evs supplémentaires obtenus par "découpage" d'une base. Énoncer la pté sur les bases adaptées.

Formule de Grassman : Énoncé et démonstration