

Partie reconduite du programme précédent

PLAN DU COURS

Applications linéaires

- Définition, vocabulaire (endo/iso/automorphisme, forme linéaire), exemples.
- Règles de calcul : image du vecteur nul, linéarité “généralisée”.
- Opérations sur les applications linéaires : structure d'espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{L}(E)$
- Composée d'AL, réciproque d'un isomorphisme ; distributivité de la composition sur l'addition.
- Noyau, image : définition, structure, caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité.
- Projecteurs : Définition des projecteurs associés p_1 et p_2 à une décomposition $E = E_1 \oplus E_2$, propriétés élémentaires (linéarité, $p_1 + p_2 = \text{Id}_E$, $p_1 \circ p_2 = 0$, image et noyau, ens des points fixes) caractérisation (si $p \in \mathcal{L}(E)$, p projecteur $\iff p \circ p = p$).
- Symétries : définition, propriétés (automorphie, projecteur associé, écritures des sous-espaces associés comme noyaux), caractérisation (si $s \in \mathcal{L}(E)$, s symétrie $\iff s \circ s = \text{Id}_E$).

Remarques : pas encore d'AL en dimension finie ni de matrices d'AL.

QUESTIONS DE COURS

Généralités sur les applications linéaires : Définition, vocabulaire, exemple et contre-exemple de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

Composition et AL Montrer que la réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.

Enoncer les propriétés de distributivité de la composition sur la somme.

Noyau, image : Définition, structure, caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité. Démonstrations de la structure du noyau et de la caractérisation de l'injectivité.

Projecteurs/symétries : Pour les projecteurs ou les symétries (au choix de l'examineur/trice) donner sans démonstration : définition (illustrée), propriétés (cf plan du cours pour la liste des ptés que les élèves doivent savoir) et caractérisation.

Caractérisation des projecteurs : Démontrer que (p endomorphisme et $p \circ p = p$) implique p projecteur.

Nouvelle partie

PLAN DU COURS

Applications linéaires en dimension finie

- Image par une application linéaire d'une famille liée, génératrice (+cas surjectif), libre (pour f injective).
- Théorème de “détermination” d'une application linéaire par les images des vecteurs d'une base, par les restrictions sur deux sous-espaces supplémentaires.
- Rang d'une application linéaire. Majoration du rang d'une composée. Théorème du rang.
- Caractérisation d'isomorphisme en dimensions connues. Deuxième caractérisation avec l'image d'une base.
- Tout espace de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Remarques : pas encore de matrices d'AL.

QUESTIONS DE COURS

Applications linéaires et familles : Image d'une famille liée, génératrice, libre. Démontrer deux des propriétés (au choix de l'examineur/rice).

Théorème du rang : Enoncé et démonstration (construction de l'isomorphisme uniquement ; on admet qu'un isomorphisme conserve la dimension)

Hyperplan et forme linéaire : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $H = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(\alpha) = 0\}$. Déterminer une base de H et sa dimension.

Expliquer comment retrouver sa dimension à l'aide d'une forme linéaire judicieuse.

Un automorphisme de polynômes. Montrer que l'application $\phi : P \mapsto 3P + P'$ est un automorphisme de $E = \mathbb{R}_n[X]$. (voir fiche des exercices type corrigés)