

Partie reconduite du programme précédent

PLAN DU COURS

Applications linéaires en dimension finie

- Image par une application linéaire d'une famille liée, génératrice (+cas surjectif), libre (pour f injective).
- Théorème de "détermination" d'une application linéaire par les images des vecteurs d'une base, par les restrictions sur deux sous-espaces supplémentaires.
- Rang d'une application linéaire. Majoration du rang d'une composée. Théorème du rang.
- Caractérisation d'isomorphisme en dimensions connues. Deuxième caractérisation avec l'image d'une base.
- Tout espace de dimension n est isomorphe à \mathbb{K}^n .

Remarques : pas encore de matrices d'AL.

QUESTIONS DE COURS

Applications linéaires et familles : Image d'une famille liée, génératrice, libre. Démontrer deux des propriétés (au choix de l'examineur/rice).

Théorème du rang : Énoncé et démonstration (construction de l'isomorphisme uniquement; on admet qu'un isomorphisme conserve la dimension)

Hyperplan et forme linéaire : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $H = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(\alpha) = 0\}$. Déterminer une base de H et sa dimension.

Expliquer comment retrouver sa dimension à l'aide d'une forme linéaire judicieuse.

Un automorphisme de polynômes. Montrer que l'application $\phi : P \mapsto 3P + P'$ est un automorphisme de $E = \mathbb{R}_n[X]$. (voir fiche des exercices type corrigés)

Nouvelle partie

PLAN DU COURS

Matrices et applications linéaires

- Matrice d'une famille de vecteurs, d'une application linéaire. Calcul de l'image d'un vecteur.
- AL canoniquement associée à une matrice, noyau et image d'une matrice.
- Produit matriciel et composée d'AL. Matrices inversibles et isomorphismes. L'inversibilité d'un côté entraîne l'inversibilité d'une matrice. Caractérisation en terme de système.
- Changement de bases : matrice de passages; effet sur les coordonnées d'un vecteur; effet sur les applications linéaires.
- Retour sur le rang d'une matrice. Th du rang matriciel. Caractérisation des matrices inversibles par le rang. Invariance du rang par multiplication par une matrice inversible/par opérations sur les lignes (ou les colonnes).

Remarque. Pas encore de déterminant.

QUESTIONS DE COURS

Un exemple de matrice d'une AL : Soit E un espace vectoriel de base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

On considère u l'endomorphisme de E défini par

$$u(\vec{e}_1) = \vec{e}_2 - \vec{e}_3, \quad u(\vec{e}_2) = \vec{e}_3 - \vec{e}_1, \quad u(\vec{e}_3) = \vec{e}_1 - \vec{e}_2.$$

- Ecrire la matrice A de u dans cette base. Déterminer $\ker u$, $\text{Im} u$.
- On admet que $A^{2n+1} = (-3)^n A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Déterminer l'expression de u^{2n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Produit matriciel et applications linéaires : Lien entre le produit matriciel et la composition des applications linéaires. Démonstration.

Matrices inversibles : Caractérisation des isomorphismes par la matrice (à démontrer). Conséquence : caractérisation des matrices inversibles par un système (3 pts équivalentes à A inversible)

Matrices de passage - changement de base. Définition de matrice de passage. Formule de changement de base pour les coordonnées d'un vecteur. Formule de changement de base pour une application linéaire (cadre à préciser). Cas d'un endomorphisme.

Synthèse sur le rang En utilisant comme source les différents chapitres sur les matrices et l'algèbre linéaire, présenter les différentes notions de rang (familles, AL, matrices) et leur relations. Présenter succinctement quelques méthodes (abstraites ou concrètes) de calcul de rang.
