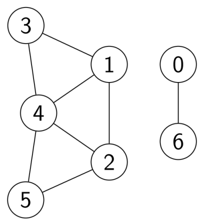
Graphes

I. Théorie des graphes

A. Généralités sur les graphes

Définition. Un **graphe (non orienté)** est un couple $G = (S,A)$ où
- S est un ensemble fini : les **sommets** (ou nœuds) ;
- A est un ensemble dont chaque élément est un *ensemble* de deux sommets : les **arêtes**.
  En particulier, il n'y a pas d'ordre sur les arêtes.

Remarque. On représente les sommets d'un graphe par des *points* et les arêtes par des *traits* entre les points.



Exemple. Sommets et arêtes associés au graphe représenté ci-contre

Définition. Un **graphe orienté** est un couple $\overrightarrow{G} = (S, \overrightarrow{A})$ où
- S est un ensemble fini : les **sommets**
- $\overrightarrow{A}$ est un ensemble dont chaque élément est un *couple* de deux sommets : les **arcs**.
  En particulier, il y a un ordre sur les arcs.

Remarque. On représente les arcs d'un graphe orienté par des *flèches* entre les points

Exemple. Représentation du graphe orienté associé à $V = \{0,1,2,3,4,5,6\}$
et $E = \{(0,6),(6,0),(1,2),(1,3),(4,1),(2,4),(2,5),(3,4),(5,4)\}$.

Définition. Un graphe complet est un graphe non orienté possédant toutes les arêtes possibles.

Exemple. Illustration d'un graphe complet à 5 sommets. Nombre d'arêtes pour n sommets ?

B. Degré d'un sommet

Définition. Soit $G = (S,A)$ un graphe non orienté.
- Soit $a = \{u, v\} \in A$ une arête.
  Les sommets u et v sont appelés **extrémités** de a ; on dit que u et v sont **adjacents** (ou voisins).
- Le **degré** d'un sommet $s \in S$, noté $\deg(s)$, est son nombre de voisins.
  Si $\deg(s) = 1$, on dit que s est une *feuille*.

Pour un graphe orienté, on distingue
le **degré entrant** $\deg^-(s)$ (nb de *prédécesseurs*) et le **degré sortant** $\deg^+(s)$ (nb de *successeurs*).

Exemples. Dans le graphe non orienté ci-dessus, avec les sommets 2 et 6.
Dans la version orientée, degrés entrant et sortant de 4.
Degré d'un sommet dans un graphe complet.

Proposition 1 (Formule des degrés). *Soit $G = (S,A)$ un graphe. On a la formule* $\sum_{s\in S} \deg(s) = 2|A|$

Démonstration 1. On compte de deux manières les extrémités d'arêtes : chaque arête a deux extrémités et chaque sommet est extrémité de $\deg(s)$ arêtes.

C. Chemins et connexité

Définition. Un **chemin** est une suite d'arêtes consécutives différentes.
La **longueur** d'un chemin est son nombre d'arêtes.
La **distance** de u à v est la plus petite longueur d'un chemin de u à v (ou ∞ s'il n'y a pas de chemin).
Un **cycle** est un chemin revenant au sommet de départ.

Exemples. Chemins de longueur différentes entre deux mêmes sommets. Distance orientés différentes.
Graphes avec ou sans cycle

Définition. Un graphe non orienté est dit **connexe** s'il existe un chemin de n'importe quel sommet à n'importe quel autre.
Les plus grands sous-graphes connexes sont appelés **composantes connexes**.
Un graphe est la *réunion disjointe* des ses composantes connexes.

Exemples. Un graphe connexe et un non connexe. Composantes connexes du dernier.

II. Représentation des graphes en Python

Il existe deux représentations principales des graphes en Python : par matrice d'adjacence ou par liste d'adjacence.

A. Matrices d'adjacence

Définition. On considère comme ensemble de sommets $S = \{0, 1, \dots, n-1\}$.
Un graphe non orienté $G = (S, A)$ se représente par une matrice d'adjacence $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *symétrique* telle que

- $m_{i,j} = 1 \iff \{i, j\} \in A$
- $m_{i,j} = 0 \iff \{i, j\} \notin A$

Remarque. Cette définition s'adapte bien sûr pour un graphe orienté. Cependant la matrice associée n'est plus toujours symétrique.

Exemples. Pour quelques petits graphes connexes ou non.

Proposition 2. *En Python, une matrice peut se représenter par une **liste de listes**.*
Plus précisément la matrice $M = ((m_{i,j}))$ sera associé à la liste

$$M = [[m_{0,0}, \dots, m_{0,n-1}], [m_{1,0}, \dots, m_{1,n-1}], \dots, [m_{n-1,0}, \dots, m_{n-1,n-1}]]$$

On peut alors accéder facilement aux données suivantes :

Donnée	*ligne numéro i*	$m_{i,j}$	*nb de lignes*	*nb de colonnes*
Code	$M[i]$	$M[i][j]$	**len**`(M)`	**len**`(M[0])`

B. Liste d'adjacence

Définition. On considère comme ensemble de sommets $S = \{0, 1, \dots, n-1\}$.
On peut représenter un graphe non orienté $G = (S, A)$ par une **liste d'adjacence**.
C'est une liste de listes `G` telle que `G[u]` est la liste des voisins de u.

Remarque. Pour un graphe orienté, chaque sous-liste contient les *successeurs* du sommet.

Exemple. Pour les graphes précédents.