Partie reconduite du programme précédent

Plan du cours

Variables aléatoires (v.a.)

- Définition, v.a. constante, v.a. indicatrice, système complet associé.
- Loi d'une v.a., transformée d'une v.a.
- Espérance, propriétés, théorème de transfert ; variance, propriétés, écart-type, inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Lois usuelles

- Loi uniforme, espérance.
- Loi de Bernoulli, espérance, variance.
- Loi binomiale, espérance et variance, somme de Bernoulli mutuellement indépendantes.

Couples de variables aléatoires

- Définition, loi conjointe, lois marginales, loi conditionnelle.
- Indépendance, indépendance mutuelle, espérance du produit de deux v.a. indépendantes.
- Covariance, variance d'une somme, cas de v.a. indépendantes.

Remarque aux colleuses et colleurs : tout se déroule encore sur un univers fini. Par conséquent toutes les v.a. rencontrées sont à image finie.

Questions de cours

Espérance d'une v.a. réelle : Définition, propriétés (linéarité, croissance), th de transfert à énoncer.

Variance : Définition, ptés, formule de Kœnig-Huygens.
Démontrer la formule de $V(aX+b)$ et la formule de Kœnig-Huygens.

Lois d'un couple de v.a. : Définition de couple de v.a., loi conjointe, lois marginales.

Exemple : Une urne contient trois boules indiscernables numérotées 1,2,3. On tire successivement avec remise deux boules. On note X_1 (resp. X_2) le numéro de la première (resp. seconde) boule. On pose $X = X_1$ et $Y = min(X_1, X_2)$.

Déterminer la loi conjointe puis les lois marginales du couple $Z = (X, Y)$ (à représenter dans un tableau).

Présentation des lois usuelles : Donner sans démonstration : définition et espérance de loi uniforme, de Bernoulli, binomiale ; variance d'une loi de Bernoulli et binomiale. Expliquer comment reconnaître en pratique une loi binomiale.

Covariance. Définition. Démonstration des formules $cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ et $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2cov(X,Y)$

Nouvelle partie

Plan du cours

Intégration

- Intégration des fonctions en escalier, des fonctions continues
- Linéarité, relation de Chasles.
- Positivité et croissance de l'intégrale. Amélioration pour obtenir une inégalité stricte.
- Inégalité de la moyenne.Majoration de $|\int fg|$; cas particulier : $|\int_a^b f| \leqslant |b-a| \sup f$.
- Sommes de Riemann $S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\frac{b-a}{n})$ et $T_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a+k\frac{b-a}{n})$.
- Primitives d'une fonction continue. Expression de l'unique primitive s'annulant en a fixé.
- Intégration par parties. Changement de variable.
- Formule de Taylor avec reste intégral, inégalité de Taylor-Lagrange.
- Méthode de dérivation d'une fonction du type $x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Remarques aux colleuses et colleurs. La décomposition en éléments simples générale n'est pas au programme. La forme éventuelle devra donc être donnée.

Les élèves savent seulement gérer le cas de pôles simples.

Les méthodes d'intégration des fractions rationnelles en cosinus ou sinus, celles des racines de fonctions homographiques ou des racines de polynômes du second degré sont hors programme. Les changements de variable éventuels devront donc être donnés.

Questions de cours

Positivité d'une intégrale : Enoncer les deux résultats de positivité d'une intégrale (version large puis stricte). Démontrer le cas "strict".

Convergence des sommes de Riemann : Démonstration de la convergence (pour celle notée S_n) dans le cas d'une fonction lipschitzienne.

Techniques de calcul : Énoncer les formules d'intégration par partie et de changement de variable.
Expliquer la méthode de dérivation de $x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$.

Formule de Taylor Reste intégral : Énoncé et démonstration

Inégalité de Taylor-Lagrange. Énoncé. Application à la fonction exp sur $[0, x]$.