

Partie reconduite du programme précédent

PLAN DU COURS

Intégration

- Intégration des fonctions en escalier, des fonctions continues
- Linéarité, relation de Chasles.
- Positivité et croissance de l'intégrale. Amélioration pour obtenir une inégalité stricte.
- Inégalité de la moyenne. Majoration de $|\int_a^b f g|$; cas particulier : $|\int_a^b f| \leq |b-a| \sup f$.
- Sommes de Riemann $S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\frac{b-a}{n})$ et $T_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(a+k\frac{b-a}{n})$.
- Primitives d'une fonction continue. Expression de l'unique primitive s'annulant en a fixé.
- Intégration par parties. Changement de variable.
- Formule de Taylor avec reste intégral, inégalité de Taylor-Lagrange.
- Méthode de dérivation d'une fonction du type $x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$.

Remarques aux colleuses et colleurs. La décomposition en éléments simples générale n'est pas au programme. La forme éventuelle devra donc être donnée.

Les élèves savent seulement gérer le cas de pôles simples.

Les méthodes d'intégration des fractions rationnelles en cosinus ou sinus, celles des racines de fonctions homographiques ou des racines de polynômes du second degré sont hors programme. Les changements de variable éventuels devront donc être donnés.

QUESTIONS DE COURS

Positivité d'une intégrale : Énoncer les deux résultats de positivité d'une intégrale (version large puis stricte). Démontrer le cas "strict".

Convergence des sommes de Riemann : Démonstration de la convergence (pour celle notée S_n) dans le cas d'une fonction lipschitzienne.

Techniques de calcul : Énoncer les formules d'intégration par partie et de changement de variable.

Expliquer la méthode de dérivation de $x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$.

Formule de Taylor Reste intégral : Énoncé et démonstration

Inégalité de Taylor-Lagrange. Énoncé. Application à la fonction exp sur $[0, x]$.

Nouvelle partie

PLAN DU COURS

Espaces euclidiens

- Produit scalaire, norme associée, inégalité de Cauchy-Schwarz, propriétés de la norme.
- Orthogonalité, orthogonal d'une partie, familles orthogonales, orthonormales. Théorème de Pythagore.
- Notion d'espace euclidien, calcul d'un produit scalaire en coordonnées dans une BON.
- Orthonormalisation de Schmidt. Complétion d'une famille orthonormale en une BON.
- Sous-espace orthogonal. Propriétés.
- Projecteurs orthogonaux.
- Ecriture en coordonnées dans une BON d'un projeté orthogonal.
- Expression de la distance à un sous-espace grâce au projeté orthogonal.
- Supplémentaire orthogonal

QUESTIONS DE COURS

Produit scalaire : Définition d'un produit scalaire. Donner sans démonstration les produits scalaires usuels sur \mathbb{R}^n et $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. Démontrer le caractère défini positif pour celui sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

Inégalité de Cauchy-Schwarz : Énoncé. Démonstration (sans le cas d'égalité).

Procédé de Gram-Schmidt : Énoncer le théorème. Expliquer la méthode pratique pour 3 vecteurs.

Projection orthogonale et distance : Donner et démontrer l'expression en coordonnées du projeté orthogonal $p(x)$ sur un sous-espace F .

Démontrer que la distance $d(x, F)$ est atteinte en $p(x)$.

Supplémentaire orthogonal : Montrer qu'un sous-espace F et son orthogonal F^\perp sont supplémentaires. En dimension finie, montrer que $(F^\perp)^\perp = F$.