Partie reconduite du programme précédent

Plan du cours

Espaces euclidiens

- Produit scalaire, norme associée, inégalité de Cauchy-Schwarz, propriétés de la norme.
- Orthogonalité, orthogonal d'une partie, familles orthogonales, orthonormales. Théorème de Pythagore.
- Notion d'espace euclidien, calcul d'un produit scalaire en coordonnées dans une BON.
- Orthonormalisation de Schmidt. Complétion d'une famille orthonormale en une BON.
- Sous-espace orthogonal. Propriétés.
- Projecteurs orthogonaux.
- Ecriture en coordonnées dans une BON d'un projeté orthogonal.
- Expression de la distance à un sous-espace grâce au projeté orthogonal.
- Supplémentaire orthogonal

Questions de cours

Produit scalaire : Définition d'un produit scalaire. Donner sans démonstration les produits scalaires usuels sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$. Démontrer le caractère défini positif pour celui sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$.

Inégalité de Cauchy-Schwarz : Enoncé. Démonstration (sans le cas d'égalité).

Procédé de Gramm-Schmidt : Enoncer le théorème. Expliquer la méthode pratique pour 3 vecteurs.

Projection orthogonale et distance : Donner et démontrer l'expression en coordonnées du projeté orthogonal $p(x)$ sur un sous-espace F.
Démontrer que la distance $d(x,F)$ est atteinte en $p(x)$.

Supplémentaire orthogonal : Montrer qu'un sous-espace F et son orthogonal $F^\perp$ sont supplémentaires. En dimension finie, montrer que $(F^\perp)^\perp = F$.

Nouvelle partie

Plan du cours

Déterminants d'ordre n

- Existence et unicité de l'application déterminant sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Propriétés ($\det(\lambda A)$, colonne nulle, deux colonnes identiques, cas des matrices diagonales).
- Cas des déterminants d'ordre 2 et 3 (formules explicites).
- Effet des opérations élémentaires, déterminant d'une matrice triangulaire, caractérisation de l'inversibilité.
- Formulaire ($\det(AB), \det(A^{-1}), \det({}^tA)$). Développement suivant une ligne ou une colonne.
- Déterminant d'une famille de vecteurs, interprétation géométrique (aire, volume), caractérisation des bases. Déterminant d'un endomorphisme, propriétés (déterminant d'une composée, cas des automorphismes)

Remarque aux colleurs et colleuses : L'existence du déterminant est admise (aucune notion de permutation n'a été vue). Pas de formules de Cramer.

Questions de cours

Notion de déterminant : Enoncer la prop d'existence et d'unicité du déterminant. Enoncer et démontrer les propriétés du déterminant (voir liste dans le plan du cours).

Déterminant d'une famille de vecteurs : Définition, interprétation géométrique, caractérisation d'une base. Exemple avec une famille de polynômes échelonnés en valuation (dans $\mathbb{R}_3[X]$).

Déterminant d'un endomorphisme : Énoncé et démo de la prop justifiant l'existence.
Propriétés (composition et automorphisme) à énoncer.
Exemple : déterminant de l'application transposition de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Déterminant et inversibilité : Caractérisation d'une matrice inversible par le déterminant.
Exemple de la matrice $\begin{pmatrix} a+b & a & a \\ a & a+b & a \\ a & a & a+b \end{pmatrix}$
(déterminant et CNS d'inversibilité)

Opérations élémentaires et calcul de déterminants : Préciser les conséquences sur la valeur du déterminant d'opérations élémentaires sur les colonnes. Donner la formule de développement selon une colonne.
Calcul du déterminant de Vandermonde $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$ (résultat attendu sous forme factorisée).